解答例

STEP II 1992、第 7 問

純粋数学 • 3 次方程式の重解

> **STEP II 1992、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q7

鍵となる考え方

$(x-a)(x-b)(x-c)$ と与えられた三次式（cubic）の係数を比較すると、p、q、r が根（root）の対称関数（symmetric function）として表される。(i) では、重根（repeated root）があることと「根の和が 0 である」ことを合わせると、根は $\alpha, \alpha, -2\alpha$ という形に定まり、あとはすべてそこから導かれる。(ii) では、問題の式は (i) の答えの q と r をより複雑なものに置き換えたもののように見える。このことから、x を平行移動して x^2 の項を消し、新しい三次式に (i) を適用すればよいと見当がつく。

解答

a、b、c が根であり、最高次の係数が 1 であるから、すべての x に対して

$$x^3 - px^2 + qx - r = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

が成り立つ。係数を比較すると

$$p = a+b+c, \qquad q = ab+bc+ca, \qquad r = abc.$$

小問 (i)

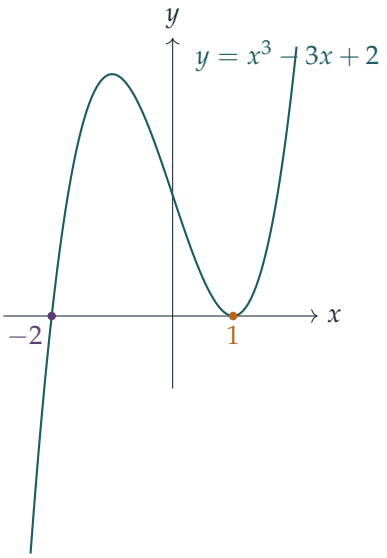
重根が $a = b = \alpha$ となるように根に名前をつける。すると $p = 0$ より $c = -(a+b) = -2\alpha$ となるので、根は $\alpha, \alpha, -2\alpha$ である。よって

$$q = \alpha^2 + \alpha(-2\alpha) + (-2\alpha)\alpha = -3\alpha^2,$$
$$r = \alpha \cdot \alpha \cdot (-2\alpha) = -2\alpha^3.$$

したがって

$$4q^3 + 27r^2 = 4(-27\alpha^6) + 27(4\alpha^6) = -108\alpha^6 + 108\alpha^6 = 0,$$

となり、示すべきことが得られた。ここでは α が実数である必要はどこにもなく、三重根（triple root）の場合（$\alpha = 0$ で、係数がすべてゼロ）も含まれている。



たとえば $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ では $\alpha = 1$、$q = -3$、$r = -2$ であり、$4(-27) + 27 \cdot 4 = 0$ となる。二重根は、グラフが軸に接することとして現れている。

小問 (ii)

今度は p がゼロとは限らない。もとの三次式の根の和は p であるから、その平均は $p/3$ である。平均の分だけずらして

$$x = y + \tfrac{p}{3}.$$

とおく。すると $y = x - \frac{p}{3}$ であるから、y についての新しい三次式の根は $a - \frac{p}{3}$、$b - \frac{p}{3}$、$c - \frac{p}{3}$ である。それらの和は $p - p = 0$ であり、a, b, c のうち二つが等しければ、これらのうち二つも等しい。

? **考えてみよう** y についての三次式は、具体的にどうなるか。

各項を展開すると

$$\begin{aligned}\left(y+\tfrac{p}{3}\right)^3 &= y^3+py^2+\tfrac{p^2}{3}y+\tfrac{p^3}{27},\\ -p\left(y+\tfrac{p}{3}\right)^2 &= -py^2-\tfrac{2p^2}{3}y-\tfrac{p^3}{9},\\ q\left(y+\tfrac{p}{3}\right) &= qy+\tfrac{pq}{3},\end{aligned}$$

となり、これらと $-r$ を足し合わせると、y^2 の項は打ち消し合い（これこそが平行移動の狙いである）、$\frac{p^3}{27}-\frac{p^3}{9}=-\frac{2p^3}{27}$ を用いて

$$x^3-px^2+qx-r=y^3+\left(q-\frac{p^2}{3}\right)y-\left(\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r\right),$$

を得る。この y についての三次式は y^3-Py^2+Qy-R の形であり、

$$P=0,\qquad Q=q-\frac{p^2}{3},\qquad R=\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r.$$

である。y^2 の係数がゼロで、等しい二つの根をもつから、小問 (i) が適用でき、$4Q^3+27R^2=0$、すなわち

$$4\left(q-\frac{p^2}{3}\right)^3+27\left(\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r\right)^2=0,$$

が得られる。これが求める結果である。

検算

- $p=0$ のとき、(ii) の結果は $4q^3+27r^2=0$ となり、小問 (i) に帰着する。
- $(x-1)^2(x-2)=x^3-4x^2+5x-2$ では $p=4$、$q=5$、$r=2$ であるから、$Q=-\frac{1}{3}$、$R=\frac{128}{27}-\frac{20}{3}+2=\frac{2}{27}$ である。すると $4Q^3+27R^2=-\frac{4}{27}+\frac{4}{27}=0$ となる。
- さらに、重根をもつ数百個のランダムな三次式について、両方の恒等式を厳密な有理数演算で確かめ、平行移動の恒等式もランダムな点で確認した。

よくある間違い

- 解と係数の関係（Vieta's formulae）での符号の誤り。この問題で選ばれている符号 $-p$、$+q$、$-r$ のもとでは、p,q,r の三つはいずれも根を用いて正の符号で表される。
- $p/3$ だけずらす向きを逆にしてしまうこと。新しい三次式の根は $a-\frac{p}{3}$ などであり、だからこそその和がゼロになる。
- (ii) で、すべてを a,a,c を用いて力ずくで展開すること。それでも解けるが、長く間違えやすい。平行移動を使えば (i) をそのまま再利用できる。

STEP のその先へ

一般の三次式では、(ii) の左辺は $-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ に等しく、これは**判別式**（discriminant）の符号を変えたものである。これは二つの根が一致するときに限ってゼロになり、その符号から、実係数の三次式が三つの実数解をもつか、一つしかもたないかがわかる。平行移動 $x = y + \frac{p}{3}$ は、三次方程式を解くカルダノ（Cardano）の公式の第一段階でもある。根の対称関数、判別式、そしてどの方程式が冪根（radicals）によって解けるかという問題は、ガロア理論（Galois theory）へとつながっていく。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、その入門として好適である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。