解答例

STEP II 1992、第 6 問

純粋数学 • 接線と解の個数

> **STEP II 1992、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q6

鍵となる考え方

方程式 $kx = \ln(2\sec x)$ の解は、原点を通る直線 $y = kx$ と曲線 $y = \ln(2\sec x)$ の交点である。この曲線は原点より上から始まり、凸（convex）であり、無限大へと急上昇する。そのため、原点を通る直線はこの曲線と交わらないか、接するか、2 回交わるかのいずれかである。特別な値 k_0 は**原点から引いた接線**（*tangent from the origin*）の傾きである。接するとは、2 つの曲線が同じ高さと同じ傾きをもつことであり、この 2 つの方程式からほかのすべてが得られる。

解答

2 つのグラフ

$f(x) = \ln(2\sec x) = \ln 2 - \ln\cos x$ とおく。すると

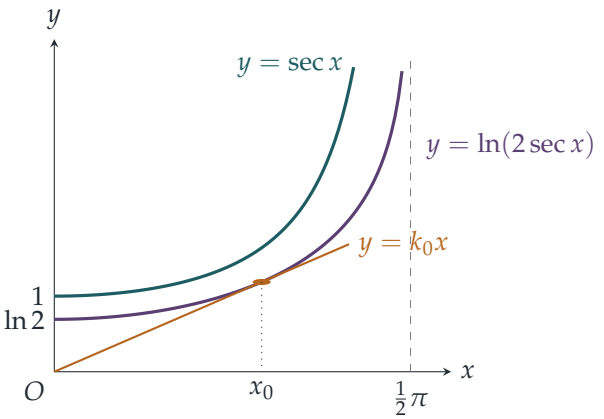
$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, \qquad f''(x) = \sec^2 x > 0.$$

したがって $f(0) = \ln 2 \approx 0.69$、$f'(0) = 0$ であり、f は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で増加し、凸（下に凸）である。また $\cos x \to 0^+$ であるから、$x \to \frac{1}{2}\pi^-$ のとき $f(x) \to \infty$ となる。

同様に、$y = \sec x$ については $\sec 0 = 1$ であり、傾きは $\sec x \tan x$ である。これは $x = 0$ で 0、それ以降は正であり、$x \to \frac{1}{2}\pi^-$ のとき $\sec x \to \infty$ となる。どちらの曲線も垂直漸近線（vertical asymptote）$x = \frac{1}{2}\pi$ をもち、どちらもそこでは定義されない。

対数曲線は常にセカント曲線の下にある。$u = \sec x \geq 1$ とおくと $\ln(2u) < u$ である。実際、$\ln(2u) - u$ の導関数は $\frac{1}{u} - 1 \leq 0$ なので、この関数の値は $u = 1$ での値 $\ln 2 - 1 < 0$ 以下である。また、対数曲線の増加ははるかに遅い。$x \to \frac{1}{2}\pi$ のとき、そ

れはセカントの ln のようにふるまう。



k が小さいとき解はなく、k が大きいとき解は 2 つ

f は増加関数なので、$[0, \frac{1}{2}\pi)$ 上で $f(x) \geq \ln 2$ であり、一方そこでは $kx < \frac{1}{2}\pi k$ である。$k \leq 2\ln 2/\pi \approx 0.44$ ならば、区間全体で $kx < \ln 2 \leq f(x)$ となるので、直線は曲線の下を通り、解は存在しない。

k が大きいとき、直線は曲線の下から始まる（$x = 0$ での高さは $0 < \ln 2$）が、十分に急なので、どこかで曲線の上に出る。$x = \frac{1}{4}\pi$ での曲線の高さは $\ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1.04$ であり、$k > \frac{6}{\pi}\ln 2 \approx 1.32$ となれば、そこで直線のほうが高くなる。$\frac{1}{2}\pi$ の近くでは曲線は無限大へ発散するが、直線の高さは高々 $\frac{1}{2}\pi k$ にとどまるので、最終的に曲線は再び直線の上に来る。直線は曲線と、上に抜けるときに 1 回、下に戻るときにもう 1 回交わる。すなわち解は 2 つである。

3 つ以上はありえない。関数 $f(x) - kx$ の 2 階導関数は $\sec^2 x > 0$ なので、この関数は凸であり、凸関数の零点は高々 2 つである。

k_0 が存在する理由

$f(0) = \ln 2 \neq 0$ なので、どの解も $x > 0$ を満たす。よって x で割って、方程式を次のように書き直せる。

$$k = g(x), \qquad \text{ただし} g(x) = \frac{\ln(2\sec x)}{x}, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

したがって、解の個数は g のグラフが高さ k に達する回数に等しい。ここで

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}, \qquad h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x),$$

であり、$h'(x) = \tan x + x\sec^2 x - \tan x = x\sec^2 x > 0$ である。$h(0) = -\ln 2 < 0$ かつ $x \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $h(x) \to \infty$ であるから、h の零点はちょうど 1 つであり、それを x_0 と

する。よって g は $(0, x_0)$ で減少し、$(x_0, \frac{1}{2}\pi)$ で増加し、両端で $g \to \infty$ となる（$x \to 0$ のとき分子は $\ln 2$ に近づき、$x \to \frac{1}{2}\pi$ のとき分子は ∞ に発散する）。ゆえに、g の最小値を $k_0 = g(x_0)$ とすると、次が成り立つ。

- $k < k_0$：解はない；
- $k = k_0$：解はちょうど 1 つで、$x = x_0$；
- $k > k_0$：解は 2 つ。

グラフで見ると、$y = k_0 x$ は $y = \ln(2\sec x)$ の接線のうち原点を通るものである。これにより概形による議論が裏づけられ、しきい値が正確に定まる。

考えてみよう なぜ「解がちょうど 1 つ」であることは、直線が接線であることを意味するのか？

直線が x_0 で曲線と横断的に（transversally）交わっているとすると、O のまわりにわずかに回転させても（k を少し小さくしても大きくしても）近くでやはり交わり、さらに上の凸性の議論から 2 つ目の交点も得られることになる。孤立したただ 1 つの共有点で、k が小さくなると共有点がなくなるものは、まさに接点である。代数的には、これは $h(x_0) = 0$、すなわち $g'(x_0) = 0$ である。

x_0 の満たす方程式

接点では、直線と曲線は同じ高さと同じ傾きをもつ。

$$k_0 x_0 = \ln(2\sec x_0), \qquad k_0 = f'(x_0) = \tan x_0.$$

（2 つ目の方程式は、上で述べた $h(x_0) = 0$ でもある。）2 つ目を 1 つ目に代入すると $x_0 \tan x_0 = \ln(2\sec x_0)$ を得る。$0 < x_0 < \frac{1}{2}\pi$ より $\tan x_0 \neq 0$ なので、

$$x_0 = \cot x_0 \, \ln(2\sec x_0),$$

となり、示すべき式が得られた。

x_0 と k_0 を求める

$x_{n+1} = \cot x_n \ln(2\sec x_n)$ を直接反復したくなるところである。しかしこれは収束が遅い。右辺の x_0 における導関数は $1 - 2x_0/\sin 2x_0 \approx -0.89$ なので、反復値は振動し、1 ステップあたり約 11% しか近づかない。$h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x)$ にニュートン法（Newton's method）を適用するほうがはるかによく、しかも $h'(x) = x\sec^2 x$ は非常に簡単である。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \tan x_n - \ln(2\sec x_n)}{x_n \sec^2 x_n}.$$

$x_1 = 1$ から始めると（以下すべてラジアンを用いる）、

$$x_2 \approx 0.9274, \qquad x_3 \approx 0.9147, \qquad x_4 \approx 0.91440.$$

小数第 2 位まで正しいことを確かめるため、符号の変化を調べる。$h(0.905) \approx -0.023 < 0$ かつ $h(0.915) \approx +0.0015 > 0$ なので、$0.905 < x_0 < 0.915$ であり、

$$x_0 \approx 0.91.$$

である。すると $k_0 = \tan x_0 \approx \tan 0.9144 \approx 1.30$ となる。同値な式 $k_0 = \ln(2\sec x_0)/x_0$ からも同じ値が得られる。

検算

- k_0 の 2 つの表し方は一致する：$\tan(0.91440) \approx 1.2981$ かつ $\ln(2\sec 0.91440)/0.91440 \approx 1.2981$。
- $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上で $g(x) = \ln(2\sec x)/x$ を数値的に調べると、最小値は $x \approx 0.914$ における 1.2981 である。
- $kx - \ln(2\sec x)$ の符号変化を数えると、$k = 1.29$ では根がなく、$k = 1.31$ では根が 2 つある。
- 答えは先に求めた大まかな評価 $0.44 < k_0 < 1.32$ に合っている。

よくある間違い

- 度数法を使ってしまう。ここでの x の値は、ニュートン法の反復値や $\tan x_0$ も含め、すべてラジアンでなければならない。
- 接する条件に方程式を 1 つしか使わない。曲線と交わるだけでは不十分で、傾きも一致しなければならない。k_0 を決めるのはこの 2 つ目の条件である。
- 確認せずに小数第 2 位まで正しいと主張する。$[0.905, 0.915]$ で h の符号が変わることを示すか、小数第 2 位が安定するまで反復すること。

STEP のその先へ

$f(x)/x$ の値域を調べて $kx = f(x)$ の根を数えるのは、大きな考え方のほんの一部である。原点を通る接線と f の凸性は、解析学や力学における**ルジャンドル変換**（*Legendre transform*）や凸双対性（convex duality）の土台となるものである。ここでニュートン

法がこれほど速く収束するのは、単根の近くで 2 次収束（quadratic convergence）するからであり、一方、不動点反復（fixed-point iteration）は比 $|\varphi'(x_0)|$ で 1 次収束するにとどまる。どちらの事実も、解析学や数値解析の最初の講義で証明される。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、凸関数とニュートン法の誤差解析を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。