解答例

STEP II 1992、第 5 問

純粋数学 ・ 行列群

> **STEP II 1992、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q5

鍵となる考え方

ここでのすべては条件 $wz - xy = 1$ にもとづいている。この条件により、S に属する行列の逆行列（inverse）が特に簡単になる。位数（order）3 の部分は、すべての 2×2 行列がそのトレース（trace）と行列式（determinant）から作られる 2 次方程式を満たすことに気づけば、最もうまく扱える。S に属する行列については、これにより $\mathbf{A}^2$、さらに $\mathbf{A}^3$ を $\mathbf{A}$ と $\mathbf{I}$ で表すことができるので、条件 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$ はトレース $w + z$ に関する条件になる。

（問題文では $\mathbf{A}$ の右下の成分が x と印刷されているが、最後の小問では z に言及しているので、意図された行列は明らかにそこが z である。以下ではそれを一貫して用いる。）

解答

元の位数

$g \in G$ の位数とは、$g^n = e$ を満たす最小の正の整数 n のことである。ここで e は G の単位元（identity）である。g のどの正の冪も e に等しくならないとき、g は無限位数をもつという。位数 1 の元は単位元だけである。

逆行列

次のようにおく。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}, \qquad wz - xy = 1.$$

2×2 行列の逆行列の通常の公式では行列式で割るが、ここでは行列式は 1 であるから

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} z & -x \\ -y & w \end{pmatrix}.$$

実際に掛け合わせると確かめられる：$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} wz - xy & 0 \\ 0 & wz - xy \end{pmatrix} = \mathbf{I}$ であり、同様に $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ である。

S は群である

群（group）の 4 つの公理を確かめる。

- **閉包性**（*closure*）。 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in S$ ならば $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\,\det\mathbf{B} = 1\times 1 = 1$ であるから、$\mathbf{AB} \in S$ である。
- **結合法則**（*associativity*）。行列の積についてはこれを仮定してよい。
- **単位元**。 $\det\mathbf{I} = 1$ であるから $\mathbf{I} \in S$ であり、すべての $\mathbf{A}$ に対して $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$ である。
- **逆元**（*inverse element*）。上で求めた行列 $\mathbf{A}^{-1}$ の行列式は $wz - (-x)(-y) = wz - xy = 1$ であるから、これは S に属する。

よって、S は行列の積に関して群である。

自己逆元と位数 2 の元

$\mathbf{A}^{-1}$ と $\mathbf{A}$ を成分ごとに比べると、$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ となるのは

$$z = w, \qquad -x = x, \qquad -y = y,$$

のとき、かつそのときに限る。すなわち $x = y = 0$ かつ $z = w$ である。このとき行列式の条件は $w^2 = 1$ となるので、$w = \pm 1$ である。したがって自己逆元（self-inverse element）は

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{および} \quad \mathbf{A} = -\mathbf{I}$$

である。元が位数 2 をもつのは、$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$（同値な言い方をすれば $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$）かつ $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ のときである。したがって位数 2 の元は $-\mathbf{I}$ のみである。

位数 3 の元

$\mathbf{A}$ のトレースを $t = w + z$ と書く。2 乗すると

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} w^2 + xy & x(w+z) \\ y(w+z) & xy + z^2 \end{pmatrix}.$$

$xy = wz - 1$ であるから、左上の成分は $w^2 + wz - 1 = tw - 1$ であり、右下の成分は $tz - 1$ である。よって

$$\mathbf{A}^2 = t\mathbf{A} - \mathbf{I}. \qquad (*)$$

考えてみよう $(*)$ は $\mathbf{A}^3$ を求めるのにどう役立つだろうか？

$(*)$ に $\mathbf{A}$ を掛け、もう一度 $(*)$ を用いて $\mathbf{A}^2$ を消去する：

$$\mathbf{A}^3 = t\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = t(t\mathbf{A} - \mathbf{I}) - \mathbf{A} = (t^2 - 1)\mathbf{A} - t\mathbf{I}.$$

したがって $\mathbf{A}$ のどの冪も $\mathbf{A}$ と $\mathbf{I}$ の一次結合で表され、係数を比較することができる。

$w + z + 1 = 0$ のとき： $t = -1$ であるから $t^2 - 1 = 0$ となり、$\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$ である。また、$\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ である。なぜなら $\mathbf{I}$ のトレースは $2 \neq -1$ だからである。$\mathbf{A}$ の位数は 3 を割り切り、しかも 1 ではないから、3 である。

逆に、$\mathbf{A}$ の位数が 3 であると仮定する。このとき $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$ かつ $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ であるから

$$(t^2 - 1)\mathbf{A} = (1 + t)\mathbf{I}.$$

- $t^2 \neq 1$ ならば $\mathbf{A} = \dfrac{1+t}{t^2-1}\mathbf{I} = \dfrac{1}{t-1}\mathbf{I}$ となり、これは単位行列のスカラー倍 $\lambda\mathbf{I}$ である。その行列式は $\lambda^2 = 1$ であるから、$\lambda = \pm 1$ である。しかし $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ は除外されており、$\mathbf{A} = -\mathbf{I}$ の位数は 3 ではなく 2 である。よってこの場合は起こりえない。
- $t = 1$ ならば、方程式は $\mathbf{0} = 2\mathbf{I}$ となるが、これは成り立たない。

残る可能性は $t = -1$、すなわち $w + z + 1 = 0$ のみである。これで「必要十分」が示された。

例。 $w = 0$、$z = -1$ とし、$wz - xy = 0 + 1 = 1$ となるように $x = -1$、$y = 1$ を選ぶ：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^3 = \mathbf{I}.$$

検算

- 上の例を実際に掛け合わせて、$\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$ を直接確かめよ。
- 120° の回転 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ は行列式 1、トレース -1 をもち、もちろん位数 3 である。
- S に属する 20 000 個のランダムな有理数成分の行列について、$\mathbf{A}^2 = t\mathbf{A} - \mathbf{I}$ が成り立つことをコンピュータで確認した。また、成分が -4 から 4 までの $\frac{1}{2}$ の倍数であ

るような S のすべての行列を調べた：位数 3 をもつのはトレースが -1 であるちょうど 48 個であり、位数 2 をもつのは $-\mathbf{I}$ のみである。

よくある間違い

- 位数 2 の元に $\mathbf{I}$ を含めてしまう。これは自己逆元ではあるが、位数は 1 である。
- 位数 3 に関する結果の一方向だけを証明してしまう。逆を示すには、$t^2 \neq 1$ の場合と $t = 1$ の場合を除外する必要がある。
- 群の公理を確かめる際に、逆元自体の行列式が 1 であることの確認を忘れる。

STEP のその先へ

群 S は**特殊線形群**（special linear group）SL_2 であり、数学で最も重要な群の一つである。恒等式 $\mathbf{A}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{A})\mathbf{A} + (\det\mathbf{A})\mathbf{I} = \mathbf{0}$ は、ケイリー–ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）の 2×2 の場合である：任意の正方行列は自分自身の固有方程式（characteristic equation）を満たす。この恒等式はまた、トレースだけで SL_2 の元についてどれほど多くのことがわかるかを示している：上の議論を一般化すると、有限位数 n の元のトレースは、ある整数 k を用いて $2\cos(2\pi k/n)$ と表されることが示される。行列の群についてさらに学ぶには Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を、ケイリー–ハミルトンの定理と固有値（eigenvalue）については Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。