解答例

STEP II 1992、第 4 問

純粋数学 • 微分の公理

STEP II 1992、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s2-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.5 節「**公理から考える微分**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/derivations.html

鍵となる考え方

4 つの規則は、微分のよく知られた性質そのものである。すなわち、積の微分法則（product rule）、線形性（linearity）、そして $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$ である。この問題では、多項式（polynomial）に対しては、これらの性質だけでこの演算が完全に決まってしまうことを示すよう求められている。定数を扱う際の工夫は、$1 \times 1 = 1$ のように、答えがすでにわかっている積を積の法則に入れてみることである。その後は、積の法則によって x のあらゆるべきを 1 段ずつ組み立てることができ、残りは線形性が処理してくれる。

全体を通して、与えられた 4 つの規則**だけ**を用いなければならない。$\Diamond$ が微分に似ているからといって、それについて何かを仮定してはならない。それこそが、これから証明しようとしていることだからである。

解答

定数

考えてみよう $\Diamond 1$ については何もわかっていない。規則からどうすればその値がわかるだろうか？

積の法則 (i) を多項式 $f(x) = g(x) = 1$ に適用する。これらの積は再び 1 であるから、

$$\diamondsuit 1 = \diamondsuit(1 \cdot 1) = 1 \cdot \diamondsuit 1 + 1 \cdot \diamondsuit 1 = 2\diamondsuit 1.$$

両辺から $\diamondsuit 1$ を引くと $\diamondsuit 1 = 0$ となる。これは零多項式（zero polynomial）である。

次に、$f(x) = c$ を任意の定数多項式とする。このとき $f(x) = c \cdot 1$ であり、c は定数であるから、規則 (iv) より

$$\diamondsuit c = \diamondsuit(c \cdot 1) = c\diamondsuit 1 = c \cdot 0 = 0.$$

これは $c = 0$ の場合も含むので、すべての定数多項式に対して $\diamondsuit f(x) = 0$ となり、示すべきことが示された。

（$\diamondsuit 1 = 0$ を導く別の方法：$x = x \cdot 1$ と書くと、規則 (i) と規則 (iii) より $1 = 1 \cdot 1 + x\diamondsuit 1$ となるので $x\diamondsuit 1 = 0$ である。x を掛けて 0 になる多項式は零多項式でなければならない。）

べき x^2 と x^3

$f(x) = g(x) = x$ として積の法則を用い、続いて規則 (iii) を用いると、

$$\diamondsuit x^2 = \diamondsuit(x \cdot x) = x\diamondsuit x + x\diamondsuit x = x + x = 2x.$$

次に、$x^3 = x^2 \cdot x$ であるから、積の法則、規則 (iii)、そしていま求めた結果により、

$$\diamondsuit x^3 = x\diamondsuit x^2 + x^2\diamondsuit x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

任意の多項式

ステップ 1：x のべき。数学的帰納法（induction）により

$$\diamondsuit x^n = nx^{n-1} \qquad \text{すべての整数} n \geq 1.$$

を証明する。$n = 1$ のときは規則 (iii) そのものである。ある $n = k \geq 1$ で成り立つと仮定する。$x^{k+1} = x^k \cdot x$ と書いて積の法則を用い、続いて規則 (iii) と帰納法の仮定を用いると、

$$\diamondsuit x^{k+1} = x\diamondsuit x^k + x^k\diamondsuit x = x \cdot kx^{k-1} + x^k = (k+1)x^k,$$

となるので、$n = k+1$ のときも成り立つ。よって数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ で成り立つ。$n = 0$ のときは、$x^0 = 1$ は定数であるから、最初の部分より $\diamondsuit x^0 = 0$ である。いずれの場合も $\diamondsuit x^n = \frac{d}{dx}x^n$ が成り立つ。

ステップ 2：和。規則 (ii) は 2 つの多項式について述べられているが、項の個数についての帰納法により任意の有限和に拡張できる。実際、$\diamondsuit(f_1 + \cdots + f_m) = \diamondsuit f_1 + \cdots + \diamondsuit f_m$

が成り立つならば、$(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) + \mathrm{f}_{m+1}$ に規則 (ii) を適用すると、$m+1$ 項についての同じ主張が得られる。

ステップ 3：まとめ。任意の多項式は、定数係数 a_k を用いて $\mathrm{h}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ と書ける。ステップ 2、続いて各項に規則 (iv)、さらにステップ 1 を用いると、

$$\begin{aligned} \lozenge \mathrm{h}(x) &= \lozenge(a_0) + \lozenge(a_1 x) + \cdots + \lozenge(a_n x^n) \\ &= a_0 \lozenge 1 + a_1 \lozenge x + \cdots + a_n \lozenge x^n \\ &= 0 + a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{h}(x)\big), \end{aligned}$$

となり、これが証明すべきことであった。

検算

微分が本当に 4 つの規則すべてを満たすことを確認しておく価値がある。そうでなければ、この結果は中身のないものになってしまうからである。実際、微分はこれらを満たす（積の微分法則、線形性、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x = 1$）。また、解答と同じように 4 つの規則だけを用いて $\lozenge$ をコンピュータ上で構成し、分数係数をもつ次数 7 以下のランダムな多項式 500 個について通常の導関数と比較した。両者は常に一致し、数値的な差分商（difference quotient）とも一致した。たとえば、規則から $\lozenge x^3 = 3x^2$ が得られる。

よくある間違い

- 「定数の導関数は 0 だから $\lozenge c = 0$」と言ってしまうこと。これは証明しようとしていることを仮定している。0 は規則から導かれなければならない。
- 最後の部分で定数項を忘れること。帰納法は $n = 1$ から始まるので、a_0 には定数についての結果が必要である。
- 規則 (ii) が 2 項の場合から帰納法で拡張できることに触れずに、多くの項の和に対して用いること。

STEP のその先へ

規則 (i)、(ii)、(iv) を満たす演算は**導分**（derivation）と呼ばれ、導分は代数学や幾何学のいたるところで研究されている。この問題は、多項式上の導分が x での値だけで完全に決まることを示している。より一般に、$\mathrm{p} = \lozenge x$ とおくと $\lozenge \mathrm{h} = \mathrm{p}(x)\,\mathrm{h}'(x)$ であり、微分幾何学（differential geometry）ではこの考え方がベクトル場（vector field）の

定義となる。多項式環（polynomial ring）という代数的な枠組みについては、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。