解答例

STEP II 1992、第 3 問

純粋数学 ・ 内サイクロイドと面積

> **STEP II 1992、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q3

鍵となる考え方

すべては**滑らずに転がる**（rolling without slipping）という条件から導かれる。すなわち、小円が大円に沿って転がった弧の長さは、小円のうち接触してきた部分の弧の長さに等しい。これによって小円がどれだけ回転したかが決まり、あとは B が単に「中心 P に正しい向きの単位ベクトルを加えたもの」になる。概形を描く際には、三倍角の公式（triple-angle formulae）を使うと座標が非常にきれいに簡単になることに気づくとよい。

解答

B の座標を求める

小円（半径 1）は大円（半径 4）の内側に接し続けるので、その中心は常に O から距離 $4-1=3$ のところにある。ϕ を角 AOP とすると、

$$P = (3\cos\phi,\ 3\sin\phi).$$

T を現在の接点とする。T は半直線 OP の延長上にあるので $T = (4\cos\phi, 4\sin\phi)$ であり、P から T への向きは x 軸と角 ϕ をなす。

はじめ B は接点 A にあった。滑りがないので、大円の弧 AT の長さは小円の弧 BT の長さに等しい：

$$4\phi = 1 \times \angle BPT \quad \Longrightarrow \quad \angle BPT = 4\phi.$$

考えてみよう P で測ったとき、B の角は $\phi + 4\phi$ だろうか、それとも $\phi - 4\phi$ だろうか。

P が O のまわりを反時計回りに動くとき、小円は大円の内側に沿って転がるので、**時計回り**に回転する（図の矢印）。点 B はそれ以前の接点だったので、新しい接点 T の後ろに取り残されている。つまり小円に沿って T から B へ進むのは、時計回りに 4ϕ の回転である。したがって向き $\overrightarrow{PB}$ は x 軸と角 $\phi - 4\phi = -3\phi$ をなし、$PB = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} B &= P + (\cos(-3\phi),\ \sin(-3\phi)) \\ &= (3\cos\phi + \cos 3\phi,\ 3\sin\phi - \sin 3\phi), \end{aligned}$$

となり、求める結果が得られた。（確認：$\phi = 0$ とすると $(4,0) = A$ となる。）

C の概形を描く

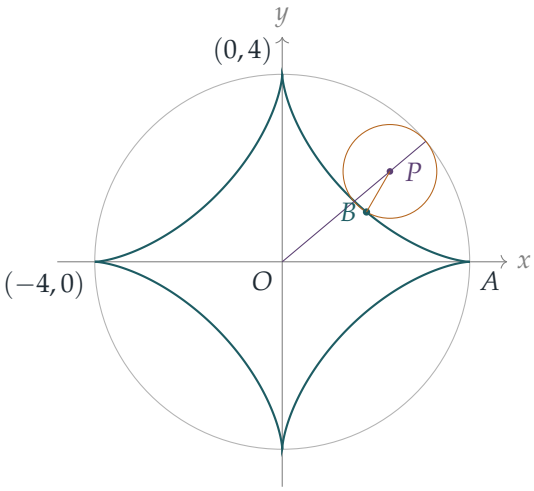
$\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$ および $\sin 3\phi = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$ を用いると、

$$x = 4\cos^3\phi, \qquad y = 4\sin^3\phi.$$

よって C は曲線 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$、すなわち**アステロイド**（astroid）である。いくつかの特徴を挙げる：

- B が大円上にあるのは $\cos^6\phi + \sin^6\phi = 1$ のとき、すなわち $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ のときに限り、そのとき点 $(\pm 4, 0)$、$(0, \pm 4)$ を与える。ここでは B が接点なので瞬間的に静止しており、曲線は尖点（cusp）をもつ。
- 曲線は両方の座標軸に関して対称である（ϕ を $-\phi$ または $\pi - \phi$ に置き換えればよい）。
- 第1象限では $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{12\sin^2\phi\cos\phi}{-12\cos^2\phi\sin\phi} = -\tan\phi$ であるから、曲線は $(4,0)$ を x 軸に沿って出発し、$(0,4)$ に y 軸に沿って到達する。曲線は**内側に**へこんでいる：$\phi = \frac{\pi}{4}$ では $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ を通り、これは直線 $x + y = 4$ よりかなり内側である。

P が一周する（ϕ が 0 から 2π まで動く）と、小円は OP に対して3回転し、B は A に戻る。したがって C は4つの尖点をもつ閉曲線である。



面積

$x = 3\cos\phi + \cos 3\phi$ であり、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 3\cos\phi - 3\cos 3\phi,$$

であるから、

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 9\cos^2\phi - 6\cos\phi\cos 3\phi - 3\cos^2 3\phi.$$

一周期全体にわたって、任意の整数 $k \neq 0$ に対して $\int_0^{2\pi} \cos^2 k\phi \,\mathrm{d}\phi = \pi$ が成り立ち（$\frac{1}{2}(1+\cos 2k\phi)$ と書き直せばよい）、また

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi\cos 3\phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 4\phi + \cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi = 0.$$

したがって

$$\text{面積} = \int_0^{2\pi} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\,\mathrm{d}\phi = 9\pi - 0 - 3\pi = 6\pi.$$

答えは当然あるべきとおり正である：ϕ が増加するにつれて、B は C を反時計回りに一周する。

検算

- C は内側にへこんでいるので、領域は 4 つの尖点を頂点とする面積 32 の正方形の内部にある。実際 $6\pi \approx 18.85 < 32$ である。
- 数値的に、積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用しても、C に内接する 200 000 角形の面積を靴ひも公式（shoelace formula）で求めても、どちらも $18.8496\ldots = 6\pi$ となる。

- アステロイドの標準的な面積公式 $\frac{3}{8}\pi a^2$ に $a = 4$ を代入しても 6π が得られる。
- 各尖点において B の速さの数値は 0 となり、転がりの条件が要求するとおり、B が大円に接するとき静止していることが確かめられる。

よくある間違い

- $\overrightarrow{PB}$ の角を $+5\phi$ や $+3\phi$ としてしまう：小円は P が O のまわりを動く向きと**逆向き**に回転する。
- P の軌道の半径として 3 ではなく 4 を使ってしまう。
- 鋭い尖点の代わりに丸い端を描いたり、外側にふくらんだ弧を描いたりしてしまう。

STEP のその先へ

ある円の内側を転がる円の上の点が描く曲線は**内サイクロイド**（hypocycloid）であり、外側を転がる場合は**外サイクロイド**（epicycloid）となる。半径の比が 4 : 1 のときアステロイドが得られ、比が 3 : 1 のときは 3 つの尖点をもつデルトイド（deltoid）が得られる。面積の公式 $\int x\,\mathrm{d}y$ はグリーンの定理（Green's theorem）の特別な場合である。この定理は閉曲線に沿った積分を、その内部の領域上の二重積分と結びつけるもので、大学 1 年次のベクトル解析（vector calculus）の山場の一つである。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）は、$z = 3e^{i\phi} + e^{-3i\phi}$ を用いてこれらの転がり曲線を見事に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。