解答例

STEP II 1992、第 2 問

純粋数学 ・ クレロー型微分方程式

> **STEP II 1992、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q2

鍵となる考え方

この方程式は $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ として $y = xp - f(p)$ の形をしており、クレロー方程式（Clairaut equation）とよばれる。一度微分すると厄介な p の項が打ち消し合い、残った式はずっと簡単な二つの方程式に因数分解される。ただし、微分すると情報が失われる（定数が消える）ので、得られた解の候補はすべて $(*)$ に代入し直して定数を決めなければならない。

解答

$p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ とおくと、$(*)$ は $y = xp - \cosh p$ となる。

微分する

両辺を x で微分する。xp には積の微分法（product rule）を、$\cosh p$ には合成関数の微分法（chain rule）を用いると

$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \sinh p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

両辺の p が打ち消し合い、

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x - \sinh p) = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(x - \sinh\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0.$$

が残る。積が 0 となるのはいずれかの因数が 0 のときに限るから、$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ または $x - \sinh\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$ であり、これが示すべきことであった。

二つの方程式

第一の方程式。 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ を 2 回積分すると、一般解（general solution）

$$y = Ax + B, \qquad A, B \text{ は任意定数}$$

が得られる。

第二の方程式。このとき $\sinh p = x$ である。sinh は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全単射（bijection）であるから、すべての x に対して $p = \sinh^{-1} x$ が得られる。$u = \sinh^{-1} x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\begin{aligned} y &= \int \sinh^{-1} x \,\mathrm{d}x = x \sinh^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C, \qquad C \text{ は任意定数} \end{aligned}$$

$(*)$ の解

$(*)$ の解はすべて導かれた二つの方程式のいずれかを満たすが、逆は成り立たない。微分によって条件が一つ捨てられたからである。そこで、それぞれの解の族を $(*)$ に代入し直す。

> **考えてみよう** 導かれた方程式には、それぞれ 2 個と 1 個の任意定数がある。これらすべてが $(*)$ のような 1 階の方程式の解になりえないのはなぜか。

1 階の方程式の解は 1 パラメータの族をなすはずであるが、上の各族は定数が多すぎるか、確かめていない定数を含んでいる。$(*)$ を微分して分かるのは $y - xp + \cosh p$ が**定数**であることだけであり、その定数が 0 であることが必要なのである。

直線。 $y = Ax + B$ のとき $p = A$ であり、$(*)$ は

$$Ax + B = Ax - \cosh A \iff B = -\cosh A.$$

となる。よって、1 パラメータの直線族

$$y = Ax - \cosh A, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

が得られる。

もう一つの曲線。 $y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C$ のとき $p = \sinh^{-1} x$ であるから、$\sinh p = x$ かつ $\cosh p = \sqrt{1 + \sinh^2 p} = \sqrt{1+x^2}$ である（$\cosh p > 0$ より正の平方根をとる）。このとき $(*)$ の右辺は

$$xp - \cosh p = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2},$$

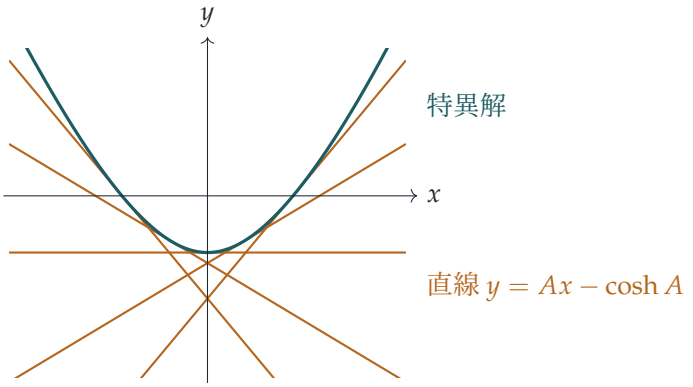
となり、これが y に等しくなるのはちょうど $C = 0$ のときである。こうして、任意定数を含まない解がもう一つ得られる：

$$y = x\sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2}.$$

以上より、$(*)$ の解は直線 $y = Ax - \cosh A$（各実数 A について）と、ただ一つの曲線 $y = x\sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2}$ である。

二つの関係

傾き A の直線は $x = \sinh A$ で曲線に接する。そこでの曲線の傾きは $\sinh^{-1}(\sinh A) = A$ であり、高さは $A\sinh A - \cosh A$ で、直線の高さと一致する。曲線は $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$ を満たすので下に凸であり、これらの接線はどれも曲線の下側にある。この曲線は直線族の**包絡線**（envelope）であり、**特異解**（singular solution）とよばれる。



このことから微妙な点も説明できる。条件 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x - \sinh p) = 0$ は各点ごとに成り立つ条件なので、解は二つの型の間で切り替わってもよい。たとえば、$x = \sinh A$ までは曲線に沿って進み、そこから先はその点での接線に沿って進むと、導関数が連続で、しかもいたるところで $(*)$ を満たす関数が得られる。このようなつなぎ合わせの解は上で求めた解から作られるものであり、期待される解答は直線族と特異解の曲線である。

検算

- $A = 0$ のとき直線は $y = -1$ であり、曲線は $y(0) = 0 - 1 = -1$、傾き $\sinh^{-1}0 = 0$ である。予想どおり、両者は $(0, -1)$ で接する。
- 数値的に $x = 0.7$ とすると $\sinh^{-1}0.7 \approx 0.6527$ であるから、曲線は $y \approx 0.4569 -$

$1.2207 = -0.7638$ を与え、$xp - \cosh p \approx 0.4569 - 1.2207$ と一致する。y に $C \neq 0$ を加えると、ちょうど C だけずれが生じる。

- ランダムな点で差分により $(*)$ を確かめると、各直線 $y = Ax - \cosh A$ と特異解の曲線のいずれについても、残差は丸め誤差の程度である。

よくある間違い

- $y = Ax + B$ や $y = x\sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2} + C$ で止めてしまうこと。これらは微分した方程式の解であり、$(*)$ そのものから $B = -\cosh A$ および $C = 0$ が要求される。
- 因数 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ で「割って」しまい、特異解をまるごと見落とすこと。

STEP のその先へ

$y = xp - f(p)$ の形の方程式はクレロー方程式である。その一般解は常に直線族 $y = cx - f(c)$ であり、特異解はその族の包絡線である。ここでは $f = \cosh$ であり、包絡線 $y = x\sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2}$ は cosh のルジャンドル変換（Legendre transform）である。この構成は力学（ラグランジアンからハミルトニアンへの移行）や熱力学に現れる。またこの例は、存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）の条件が成り立たないとき、1階の方程式の解は一意とは限らないことも示している。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、1階の方程式とこの一意性の定理を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。