解答例

STEP II 1992、第 15 問

確率・統計 ・ ランダムウォーク

> **STEP II 1992、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q15

鍵となる考え方

点が s 歩のうち R 歩を正の向きに進むと、終点は $x = R - (s - R) = 2R - s$ であり、R は二項分布（binomial distribution）に従う。したがって、ここで現れる確率はすべて二項係数（binomial coefficient）の和である。偶奇（parity）が大いに役立つ。偶数歩の後に可能なのは $x = 2$ と $x = 4$ だけであり、奇数歩の後は $x = 3$ と $x = 5$ だけである。よって各 $\mathrm{P}(s)$ は隣り合う二つの二項係数の和にすぎない。さらにパスカルの法則（Pascal's rule）により、その和は一つの二項係数にまとまる。最大値については、s が偶数の場合と奇数の場合に分けて、隣り合う項の比を調べる。

解答

最初の s 歩のうち正の向きに進んだ歩数を R とする。各歩は独立で、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で正の向きであるから、$R \sim \mathrm{B}(s, \frac{1}{2})$ であり、

$$\mathrm{P}(R = r) = \binom{s}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^s.$$

となる。s 歩後の位置は $X = 2R - s$ なので、$X = x$ となるのはちょうど $R = \frac{1}{2}(s + x)$ のときである。特に、X の偶奇は s の偶奇と一致する。

$\mathrm{P}(5)$ と $\mathrm{P}(6)$ の値

$s = 5$ のとき、起こりうるのは $x = 3$ と $x = 5$ だけであり、それぞれ $R = 4$ と $R = 5$ が必要である：

$$\mathrm{P}(5) = \left[\binom{5}{4} + \binom{5}{5}\right] \frac{1}{2^5} = \frac{5+1}{32} = \frac{3}{16}.$$

$s=6$ のとき、起こりうるのは $x=2$ と $x=4$ だけであり、それぞれ $R=4$ と $R=5$ が必要である：

$$\mathrm{P}(6)=\left[\binom{6}{4}+\binom{6}{5}\right]\frac{1}{2^6}=\frac{15+6}{64}=\frac{21}{64}.$$

一般の偶数の場合

$s=2k$ のとき、到達しうる目標点は $x=2$ と $x=4$ であり、それぞれ $R=k+1$ と $R=k+2$ が必要である。パスカルの法則 $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$ により、

$$\mathrm{P}(2k)=\left[\binom{2k}{k+1}+\binom{2k}{k+2}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\binom{2k+1}{k+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\binom{2k+1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k},$$

となる。ただし最後の段階では、$(2k+1)-(k+2)=k-1$ として $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ を用いた。これが求める結果である。この式は $k=1$ のときも成り立つ。このとき $\binom{2}{3}=0$ なので $x=4$ の項はそもそも現れず、公式は 2 歩とも正の向きに進む確率 $\frac{1}{4}$ を与える。

奇数の場合

$s=2k+1$ のとき、目標点は $x=3$ と $x=5$ であり、それぞれ $R=k+2$ と $R=k+3$ が必要である。同様にして、

$$\mathrm{P}(2k+1)=\left[\binom{2k+1}{k+2}+\binom{2k+1}{k+3}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=\binom{2k+2}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}.$$

$k=2$ のときこれは $\binom{6}{1}/32=\frac{3}{16}$ となり、$\mathrm{P}(5)$ と一致する。

最大値

$k\geq 1$ に対して $a_k=\mathrm{P}(2k)$、$k\geq 1$ に対して $b_k=\mathrm{P}(2k+1)$ とおく（$b_0=\mathrm{P}(1)=0$ に注意）。これらはすべて正なので、隣り合う項は比によって比較できる。

考えてみよう 二つの二項係数の比はどのように簡単にすればよいか？

両方を階乗で表して約分すればよい。偶数歩の項については、

$$\frac{\binom{2k+3}{k}}{\binom{2k+1}{k-1}}=\frac{(2k+3)!}{k!\,(k+3)!}\cdot\frac{(k-1)!\,(k+2)!}{(2k+1)!}=\frac{(2k+3)(2k+2)}{k(k+3)},$$

よって

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(2k+3)(2k+2)}{4k(k+3)}=\frac{4k^2+10k+6}{4k^2+12k}.$$

分母は正なので、この比が 1 より大きいのはちょうど $10k+6>12k$、すなわち $k<3$ のときであり、$k=3$ のとき 1 に等しく、$k>3$ のとき 1 より小さい。したがって

$$a_1<a_2<a_3=a_4>a_5>a_6>\cdots,$$

となり、偶数歩での最大値は $a_3 = a_4 = \mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64}$ である（確認：$\mathrm{P}(8) = \binom{9}{3}/2^8 = 84/256 = 21/64$）。

奇数歩の項についても同様に約分すると

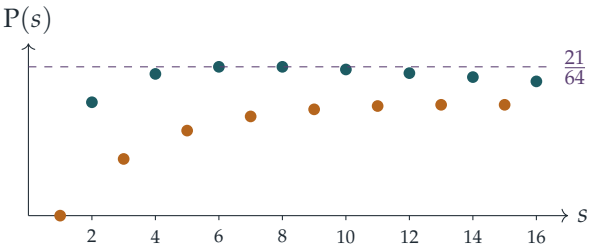
$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(2k+4)(2k+3)}{4k(k+4)} = \frac{4k^2+14k+12}{4k^2+16k},$$

となり、これは $k < 6$ のとき 1 より大きく、$k = 6$ のとき 1 に等しく、$k > 6$ のとき 1 より小さい。よって奇数歩での最大値は

$$b_6 = b_7 = \mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \binom{14}{5}\frac{1}{2^{13}} = \frac{2002}{8192} = \frac{1001}{4096}.$$

である。最後に、$\frac{21}{64} = \frac{1344}{4096} > \frac{1001}{4096}$ であるから、奇数歩の値が偶数歩の最大値を上回ることはない。以上より、$\mathrm{P}(s)$ が最大値 $\frac{21}{64}$ をとるのは次のときである：

$$s = 6 \quad \text{および} \quad s = 8.$$



青緑の点は s が偶数の場合、琥珀色の点は s が奇数の場合を表す。これらは別々の二つの数列であり、いずれも増加したのち減少し、偶数の方が常に上にある。

検算

- 小さい場合を手計算で確かめる：$\mathrm{P}(2) = \frac{1}{4}$（右へ 2 歩）、$\mathrm{P}(3) = \frac{1}{8}$（右へ 3 歩）であり、$k = 1$ とすると公式は $\binom{3}{0}/2^2 = \frac{1}{4}$ と $\binom{4}{0}/2^3 = \frac{1}{8}$ を与え、確かに一致する。
- 分数を用いた厳密な計算機による全列挙（$s \le 60$）により、二つの公式がともに正しいこと、$\mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64} \approx 0.328$ が全体の最大値であること、そして $\mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \frac{1001}{4096} \approx 0.244$ が奇数歩での最大値であることが確認できる。

よくある間違い

- すべての s について四つの目標点をすべて足し合わせてしまう。偶奇の理由から、そのうち半分は起こりえない。

- 偶数歩での最大値を求めたところで止めてしまう。奇数歩の値は別の数列をなすので、その最大値の方が小さいことを確かめなければならない。
- 「$k < 3$ のとき比は > 1」で止めて $s = 6$ だけを答えてしまう。$k = 3$ では比が 1 に等しいので、$s = 8$ も同じ値になる。

STEP のその先へ

これは単純対称ランダムウォーク（simple symmetric random walk）であり、確率論の中心的な対象の一つである。s 歩後の位置は $\sqrt{s}$ 程度に広がっていくので、固定された有限の範囲内にいる確率は、はじめは増加し、やがてゼロへと減少していく。$s = 7$ 付近のピークは、広がりがその範囲と同程度になるところである。同じ二項係数による数え上げから、鏡像原理（reflection principle）や、1 次元のランダムウォークが確率 1 で原点に戻るという事実が導かれる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）には、ランダムウォークについての優れた章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。