解答例

STEP II 1992、第 14 問

力学 ・ 連結された質点と滑車

> **STEP II 1992、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q14

鍵となる考え方

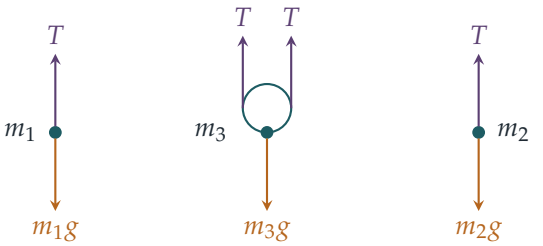
動く物体は 3 つあるが糸は 1 本だけなので、糸全体を通して張力（tension）は 1 つの値 T であり、3 つの加速度を結ぶ束縛条件（constraint）も 1 つである。各質点についてニュートン（Newton）の運動の第 2 法則を書き（滑車 P_3 とその質点は一体となって動く）、糸の長さの条件を書けば、4 つの未知数に関する 4 つの線形方程式が得られる。静止の条件は、単に P_3 の加速度が 0 であるということになる。

解答

モデル

滑車（pulley）はなめらかで軽く、糸は軽くて伸びない（inextensible）ので、張力は糸のどこでも同じ値 T をとる。P_3 は軽いので、P_3 と質量 m_3 の質点は質量 m_3 の 1 つの物体とみなせ、これは鉛直な 2 本の糸で支えられ、それぞれが大きさ T の力で上向きに引いている。

変位はすべて下向きに測る。x_1, x_2, x_3 をそれぞれ質点 m_1、質点 m_2、滑車 P_3 の固定滑車からの深さとし、加速度を a_1, a_2, a_3（下向きを正）とする。



運動方程式

各物体について鉛直方向（下向きを正）に力を分解すると、運動方程式（equation of motion）は次のようになる。

$$m_1 a_1 = m_1 g - T,$$
$$m_2 a_2 = m_2 g - T,$$
$$m_3 a_3 = m_3 g - 2T.$$

糸の束縛条件

滑車に巻きついている一定の長さを無視すると、糸は P_1 から m_1 まで下がる部分（長さ x_1）、固定滑車から P_3 まで下がる 2 本の部分（それぞれ長さ x_3）、P_2 から m_2 まで下がる部分（長さ x_2）からなる。糸は伸びないので、

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = \text{一定}, \qquad \text{よって} \qquad a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$$

が、2 回微分することにより得られる。

考えてみよう x_3 の係数が 1 ではなく 2 になるのはなぜか？

P_3 が距離 d だけ下がると、それを支える **2 本の**糸がどちらも d ずつ長くなるので、糸が $2d$ だけ使われる。その分は外側の糸から供給されなければならないので、$x_1 + x_2$ は $2d$ だけ減る。この因数を見落とすことが、この問題で最もよくある誤りである。

張力

各運動方程式をその質量で割ると、

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1}, \qquad a_2 = g - \frac{T}{m_2}, \qquad a_3 = g - \frac{2T}{m_3}.$$

これを $a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$ に代入すると、

$$4g - T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}\right) = 0.$$

両辺に $m_1m_2m_3$ を掛けて T について解くと、

$$\boxed{T = \frac{4m_1m_2m_3\,g}{m_3(m_1+m_2)+4m_1m_2}}$$

方程式のどこにも位置に依存する部分はないので、これは運動の間ずっと（いずれかの質点が滑車に達するまで）成り立つ。

P_3 が静止したままである場合

系は静止状態から動き始めるので、P_3 が静止したままであるのは $a_3 = 0$、すなわち $2T = m_3g$ のときであり、かつそのときに限る。求めた T の値を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{8m_1m_2m_3\,g}{m_3(m_1+m_2)+4m_1m_2} &= m_3g\\ \iff\quad 8m_1m_2 &= m_3(m_1+m_2)+4m_1m_2\\ \iff\quad 4m_1m_2 &= m_3(m_1+m_2),\end{aligned}$$

ここで $m_3g > 0$ で割り、正の分母を掛けた。よって $4m_1m_2 = m_3(m_1+m_2)$ ならば $a_3 = 0$ となり、題意のとおり P_3 は静止したままである。（各段階は可逆なので、この条件は十分条件であるだけでなく必要条件でもある。）

外側の質点は静止している必要はないことに注意しよう。このとき $T = \frac{1}{2}m_3g$ であり、$a_1 = g - T/m_1 = -a_2$ となるが、これは $m_1 = m_2$ でない限り 0 ではない。一方の質点が上がり、もう一方が同じ割合で下がり、糸は P_3 を動かすことなくその下を滑っていく。

検算

- 対称な場合 $m_1 = m_2 = m$：条件は $4m^2 = 2mm_3$、すなわち $m_3 = 2m$ となる。これは単に静的なつり合い $2T = 2mg = m_3g$ であり、当然の結果で安心できる。
- $m_3 \to \infty$ のとき $T \to \dfrac{4m_1m_2g}{m_1+m_2}$ となり、これはおなじみのアトウッドの器械（Atwood machine）の張力 $\dfrac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}$ のちょうど 2 倍である。これは正しい。重い P_3 は $a_3 \to g$ で自由落下するので、糸は速く加速されるからである。$m_3 \to 0$ のときは $T \to 0$ となるが、質量のない滑車は正味の力を支えられないので、これも妥当である。
- 数値的には、$m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$, $g = 9.8$（SI 単位）とすると、公式から $T \approx 21.38\,\mathrm{N}$ が得られる。エネルギーを用いる方法（ラグランジュの方法）で独立に解いても、同じ加速度 $a_1 \approx -0.891$, $a_2 \approx 2.673$, $a_3 \approx -0.891\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ が得られ

る。$m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 3$ とすると静止の条件が成り立ち、実際 $a_3 = 0$ であり、$a_1 = -a_2 = -4.9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ となる。

よくある間違い

- P_3 が 2 本の糸でつり下げられていることを忘れて、束縛条件を $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ と書いてしまう。
- P_3 にはたらく力が T ではなく $2T$ であることを忘れる。
- P_3 が静止していれば系全体が静止すると思い込む。$m_1 = m_2$ でない限り、そうはならない。

STEP のその先へ

束縛条件 $x_1 + x_2 + 2x_3 =$ 一定 により系の自由度（degrees of freedom）は 2 に減る。このような系を扱う最もすっきりした方法はラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）である。独立な座標を用いてエネルギーを書き表せば、張力はまったく必要ない（張力は「束縛力（constraint force）」である）。先ほどの数値的な検算もこの方法で行った。大学 1 年の力学で学ぶことになるだろう。滑車のような束縛のある系にニュートンの法則を丁寧に適用する様子を見るには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。