解答例

STEP II 1992、第 13 問

力学 ・ 摩擦と連結された質点

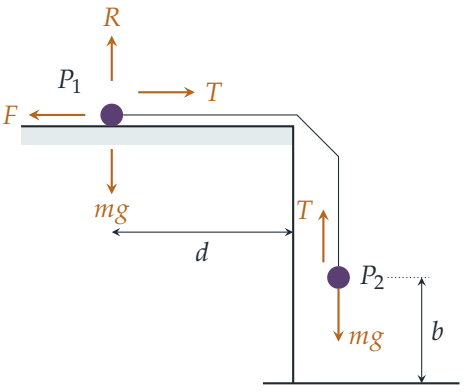
> **STEP II 1992、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q13

鍵となる考え方

運動は二つの段階からなる。P_2 が落下している間は糸（string）がぴんと張っており、二つの質点は共通の加速度で一緒に運動する。P_2 が床に当たると糸はたるみ、P_1 は摩擦によって滑りながら止まるだけである。すべては衝突の瞬間の速さから導かれる。前半では停止するまでの**距離**と端までの残りの距離を比べ、後半では二つの**時間**を比べる。

解答

P_1 と P_2 を質点（particle）とみなし、糸は軽くて伸び縮みしない（light and inextensible）もので、滑らかな端にかけられているとする。したがって張力（tension）T は糸のどこでも等しい。テーブルは P_1 に対して粗い。$b < d$ を仮定する。こうすると P_1 が端に達する前に P_2 が着地する（糸の長さはこれ以上関与しない）。



前半

第 1 段階：糸が張っている。 P_1 について鉛直方向の力のつり合いを考えると $R = mg$ である。P_1 は滑っているので摩擦力は最大摩擦力（limiting friction）となり、$F = \mu R = \mu mg$ で運動を妨げる向きにはたらく。共通の加速度を a とすると、

$$\begin{aligned} P_2\,(\text{下向き}): &\quad mg - T = ma, \\ P_1\,(\text{端の向き}): &\quad T - \mu mg = ma. \end{aligned}$$

辺々を加えると $2ma = mg(1-\mu)$ となるので $a = \frac{1}{2}g(1-\mu)$ であり、$\mu < 1$ よりこれは正である。したがって系は実際に動き始める。P_2 は静止状態から距離 b だけ落下するので、床に達したときの速さ V は

$$V^2 = 2ab = gb(1-\mu).$$

を満たす。この瞬間 P_1 も同じ速さ V をもち、距離 b だけ進んでいるので、端からの距離は $d - b$ である。

第 2 段階：糸がたるんでいる。衝突後、P_2 は床の上にあるか上向きにはね返っており、一方 P_1 は端に向かって進み続けるので、糸はたるみ $T = 0$ となる。

> **考えてみよう** P_2 がはね返っている間に、糸が再び張ることがないのはなぜか？

衝突の瞬間、糸はちょうど張った状態にあった。その後 P_1 は端に近づくので、端の向こう側へ送り出される糸は増える。一方 P_2 は床より下には行かないので、衝突時より多くの糸を必要としない。したがって、それ以降糸はたるんだままである。

よって P_1 は摩擦だけによる大きさ μg の加速度で減速し、さらに

$$s = \frac{V^2}{2\mu g} = \frac{b(1-\mu)}{2\mu},$$

の距離を進んで静止する。ただし、それより先に端に達しない場合である。ゆえに P_1 が落ちるのは $s > d - b$ のとき、かつそのときに限る：

$$\begin{aligned} \frac{b(1-\mu)}{2\mu} > d - b &\iff b - b\mu > 2\mu d - 2\mu b \qquad (\text{両辺に掛けた数は} 2\mu > 0) \\ &\iff b > \mu(2d - b) \\ &\iff \mu < \frac{b}{2d-b}, \end{aligned}$$

最後の段階では $2d - b$ で割っているが、$d > b$ よりこれは正である。どの段階も逆にたどれるので、これが求める「必要十分条件」である。（μ が $b/(2d-b)$ に等しい場合、P_1 はちょうど端で止まり、落ちない。）

後半

いま $\mu > b/(2d-b)$ なので、P_1 はテーブルの上で止まる。P_2 が初めて床に当たった瞬間から時間を測る。この瞬間、両方の質点の速さは V である。

P_1：速さ V から大きさ μg の加速度で減速するので、

$$t_1 = \frac{V}{\mu g}.$$

の時間の後に止まる。

P_2：ニュートンのはね返りの法則（Newton's law of restitution）により、速さ eV ではね返る。糸はたるんでいるので重力のみを受けて自由に運動し、$eVt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ のとき、すなわち

$$t_2 = \frac{2eV}{g}.$$

の時間の後に再び床に戻る。（衝突は瞬間的なので、1 回目のはね返りで時間は失われない。）

P_1 が 2 回目のはね返りより前に静止するのは、$t_1 < t_2$ のとき、かつそのときに限る：

$$\frac{V}{\mu g} < \frac{2eV}{g} \iff \frac{1}{\mu} < 2e \iff e > \frac{1}{2\mu},$$

ここで $V/g > 0$ で割った。よって $e > 1/(2\mu)$ ならば、P_2 が 2 回目にはね返る前に P_1 は静止し、題意が示された。実際には逆も成り立つ。

検算

- 極限の場合：$\mu \to 0$ のとき、上限 $b/(2d-b)$ は自明に下回り、滑らかなテーブルの上では P_1 は確かに滑り落ちる。$b = d$ ならば上限は 1 となるので、$\mu < 1$ である限り必ず落ちる。P_2 が着地するとき P_1 はすでに端にあって、まだ動いているのだから、これは正しい。
- $\mu < 1$ なので、二つ目の条件には $e > \frac{1}{2}$ が必要である。ほとんどはね返らない床では跳躍が短くなるので、予想どおり P_2 のほうが先に再着地する。
- 数値的に、$d = 2$、$b = 1$、$\mu = 0.5$、$e = 0.8$（$g = 9.8$ とする）として運動を少しずつ計算すると、$t_1 \approx 0.452\,\mathrm{s}$、$t_2 \approx 0.361\,\mathrm{s}$ となり、$V^2 = 4.9$ のときの $V/(\mu g)$ と $2eV/g$ に一致する。ここでは $e = 0.8 < 1/(2\mu) = 1$ なので、P_2 のほうが先に再びはね返る。逐次シミュレーションで両方の条件を無作為に試したところ、すべての場合で一致した。

よくある間違い

- 第 2 段階でも張力を残してしまう。P_2 が着地すると糸はたるみ、P_1 は摩擦だけによって減速する。
- P_1 がすでに距離 b だけ進んでいることを忘れ、s を $d-b$ ではなく d と比べてしまう。
- 系の加速度を $g(1-\mu)$ としてしまう。力 $mg(1-\mu)$ は**両方の**質量を加速させなければならないことを忘れている。

STEP のその先へ

ここでの糸は**片側**拘束（unilateral constraint）である。引くことはできても押すことはできないので、糸がたるむと運動方程式が切り替わる。衝突のときや接触が失われたときに支配方程式が変わる系は、区分的に滑らかな系（piecewise-smooth system）やハイブリッド系（hybrid system）と呼ばれ、工学の動力学やロボット工学で本格的に研究されている。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、糸、摩擦、衝突を丁寧に扱っており、次に読む本として適している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。