解答例

STEP II 1992、第 12 問

力学 ・ 力のモーメントと弾性糸

> **STEP II 1992、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q12

鍵となる考え方

各車輪は自由に回転できるので、車輪が釣り合い（equilibrium）の状態にあるための条件は、その中心のまわりのモーメント（moment）がつり合うことだけである。つり下げられた質点は車輪を一方の向きに回そうとし、弾性ひも（elastic string）はそれを反対向きに引き戻す。図形の関係から弾性ひもの伸び（extension）が θ で表され、フック（Hooke）の法則から張力（tension）が得られる。そしてモーメントを考えると θ についての方程式が一つ得られる。したがって、釣り合いの位置を数えることは、物理的に意味のある角度の範囲でこの方程式の解を数えることにほかならない。

解答

モデルの設定

質点は質点として扱い、それらをつり下げるひもは軽くて伸びない（inextensible）ものとし、弾性ひもは軽くてフックの法則に従うものとする。車軸はなめらかであるから、各中心における抗力はその中心のまわりにモーメントをもたない。

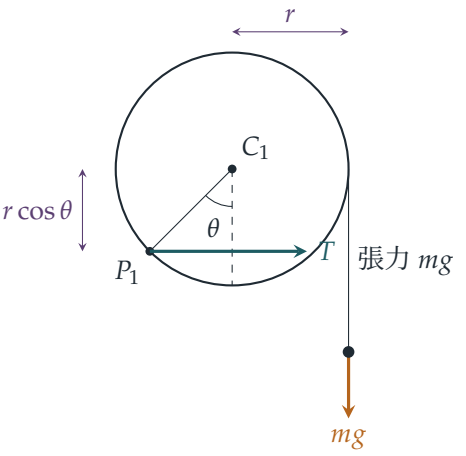
C_1C_2 を水平にとる。図において、P_1 は C_1 の外側（左側）に距離 $r\sin\theta$、下方に距離 $r\cos\theta$ の位置にあり、P_2 はその鏡像である。よって P_1 と P_2 は同じ高さにあり、弾性ひもは水平で、その長さは

$$P_1P_2 = d + 2r\sin\theta.$$

である。自然長（natural length）は d であるから、伸びは $2r\sin\theta$ であり、フックの法則により張力は

$$T = \frac{\lambda\,(2r\sin\theta)}{d}.$$

となる。



W_1 につり下げられた質点は釣り合っているので、そのひもの張力は mg である。このひもは W_2 に近い側で車輪から接線方向に離れ、その位置は C_1 から水平距離 r のところにある。弾性ひもは P_1 を水平に W_2 の方へ力 T で引き、その作用線は C_1 の下方距離 $r\cos\theta$ のところにある。

釣り合いの条件

C_1 のまわりのモーメントを考える。重さは W_1 を（図の向きで）時計回りにモーメント mgr で回そうとし、張力は反時計回りにモーメント $Tr\cos\theta$ で回そうとする。よって

$$mgr = Tr\cos\theta = \frac{2\lambda r\sin\theta}{d}\,r\cos\theta = \frac{\lambda r^2\sin 2\theta}{d},$$

となる。ここで $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ を用いた。両辺を λr^2 で割ると

$$\sin 2\theta = \frac{mgd}{\lambda r},$$

が得られ、これが示すべき式である。対称性により、C_2 のまわりのモーメントを考えても同じ方程式が得られる。

許される角度はどれか

考えてみよう なぜ θ は任意の角度をとることができず、したがって $\sin 2\theta = k$ が無数の解をもつことにはならないのか。

張力のモーメントは重さのモーメントと逆向きでなければならない。$\sin\theta \le 0$ ならば、点 P_1 と P_2 の距離は d 以下であるから、弾性ひもはたるんでおり $T = 0$ となって、mgr

とつり合うものがない。$\cos\theta \leq 0$ ならば、ひもは C_1 と同じ高さかそれより上を通るので、C_1 のまわりのそのモーメントは 0 であるか、重さと同じ向きに車輪を回す。いずれの場合も釣り合いは存在しない。したがって、釣り合いには

$$0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}, \qquad \text{すなわち} \qquad 0 < 2\theta < \pi.$$

が必要である。(二つの車輪が**異なる**角度で止まることはありうるだろうか。各中心のまわりの張力のモーメントは、T にその中心から直線 P_1P_2 までの垂直距離を掛けたものであり、どちらのモーメントも mgr に等しくなければならない。よって C_1 と C_2 はこの直線から等距離にあり、しかも直線に対して同じ側、すなわち直線は中心より下にある。したがってこの直線は C_1C_2 に平行であり、P_1 と P_2 は同じ深さにある。二つの角度の符号が逆であればひもの長さはちょうど d となってたるんでしまうから、二つの角度は一致する。ゆえに、釣り合いはすべて図に示した対称な形のものである。)

$k = \dfrac{mgd}{\lambda r} > 0$ とおく。$0 < 2\theta < \pi$ において、$\sin 2\theta$ は 0 から増加して $2\theta = \frac{\pi}{2}$ で 1 となり、再び 0 まで減少する。したがって $(0,1)$ の各値をちょうど 2 回、値 1 をちょうど 1 回とる。よって方程式 $\sin 2\theta = k$ は

- $k > 1$ のとき、解をもたない。
- $k = 1$ のとき、ちょうど一つの解 $\theta = \frac{\pi}{4}$ をもつ。
- $0 < k < 1$ のとき、ちょうど二つの解 $\theta = \alpha$ と $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ をもつ。ただし $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k \in (0, \frac{\pi}{4})$ である。

$k > 1 \iff \lambda < \dfrac{mgd}{r}$ であるから、答えは次のとおりである。

小問 (i)

$\lambda < \dfrac{mgd}{r}$ のとき、釣り合いの位置は存在しない。弾性ひもが弱すぎて、どの角度でも質点を支えられない。

小問 (ii)

$\lambda = \dfrac{mgd}{r}$ のとき、釣り合いの位置はただ一つであり、$\theta = \frac{\pi}{4}$ である。

小問 (iii)

$\lambda > \dfrac{mgd}{r}$ のとき、釣り合いの位置はちょうど二つであり、$\theta = \alpha$ と $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ である。

小問 (iv)

θ は $(0, \frac{\pi}{2})$ に限られるので、釣り合いの位置が三つ以上となる λ の値は存在しない。

検算

- 次元：λ は力であり mg も力である。また d/r は長さの比であるから、$mgd/(\lambda r)$ は無次元（dimensionless）であり、正弦の値として当然そうでなければならない。
- 極限の場合：$\lambda \to \infty$ とすると、ひもは伸びなくなり、二つの解は $\theta \to 0$（伸びはごく小さく、張力は大きい）と $\theta \to \frac{\pi}{2}$（ひもがほぼ中心と同じ高さにあり、腕の長さ（moment arm）がごく小さい）に近づく。どちらも理にかなっている。
- 数値的に、$m = 1$、$d = 4$、$r = 1$、$g = 9.8$、$\lambda = 3mgd/r$（よって $k = \frac{1}{3}$）とすると、二つの車輪の完全なモデル（二つの角度が異なることも許す）はちょうど二つの釣り合いをもち、それは $\theta \approx 0.1699$ と $\theta \approx 1.4009$ である。これらは $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$ と、$\frac{\pi}{2}$ からそれを引いたものである。

よくある間違い

- 伸びを $2r\sin\theta$ ではなく $r\sin\theta$ としてしまう。ひもの両端がともに外側へ動くことに注意する。
- 張力の腕の長さとして $r\sin\theta$ を用いてしまう。張力は水平であるから、その腕の長さは**鉛直**方向の距離 $r\cos\theta$ である。
- 物理的に可能なのは $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ だけであることを忘れて、(iv) に「無数にある」と答えてしまう。

STEP のその先へ

パラメータを変化させながら釣り合いの個数を数えることは、**分岐理論**（bifurcation theory）の出発点である。ここでは、$\lambda > mgd/r$ のときの二つの釣り合いが $\lambda = mgd/r$ で合体して消滅する。これはサドルノード分岐（saddle-node bifurcation、折り目分岐（fold bifurcation）ともいう）と呼ばれる。ポテンシャルエネルギー（potential energy）を調べると、二つのうち一方は安定（stable）で他方は不安定（unstable）であることがわかり、これは折り目分岐に典型的な性質である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、モーメント、剛体（rigid body）の釣り合い、そしてポテンシャルエネルギーによる安定性が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。