解答例

STEP II 1992、第 11 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP II 1992、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q11

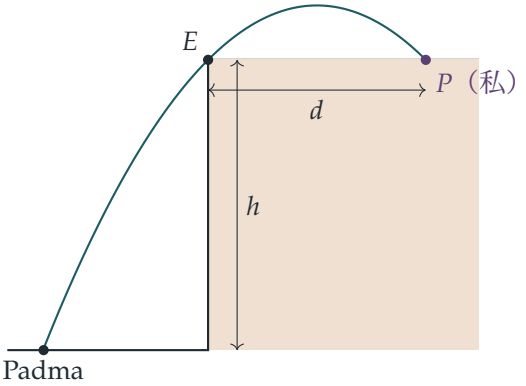
鍵となる考え方

この投げ方で厄介なのは、財布を高さ h まで上げることではなく、崖の上を越えさせることである。財布は崖の縁から私のところまで、水平距離にして少なくとも d の区間ずっと、高さ h 以上になければならない。そこで、財布が初めて高さ h に達した瞬間からの運動だけを考える。その時点以降は、水平な地面（崖の上の高さ）の上での普通の放物運動（projectile motion）であり、その速さはエネルギー保存則（conservation of energy）からわかる。あとはおなじみの最大到達距離（maximum range）u^2/g が片をつけてくれる。

解答

モデル

財布を、空気抵抗（air resistance）のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）とみなし、地面の高さから投げられるものとする（Padma の身長は無視できる）。崖の上端の縁を E、私が立っている点を P とする。したがって P は高さ h にあり、E から水平距離 d だけ先にある。崖の面は鉛直であり、浜辺は崖をはさんで私とは反対側にある。よって Padma がどこに立っても、財布は E の上を越え（最悪でもかすめ）、それから P まで降りてこなければならない。



全体を通して一つの事実を用いる。ある高さで速さ u をもち、水平から角 α だけ上向きに運動する質点は、時間 $2u\sin\alpha/g$ の後に同じ高さに戻り、その間に水平方向に

$$\frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} \leq \frac{u^2}{g},$$

だけ進む。等号が成り立つのはちょうど $\alpha = 45^\circ$ のときである。

条件は必要である

ある投げ方で財布が P に届いたとする。財布は高さ h に達しなければならないので、軌道上で初めて高さ h となる点を Q とする。崖のふもとを位置エネルギー（potential energy）の基準にとると、エネルギー保存則から Q での速さ u は

$$u^2 = V^2 - 2gh.$$

となる。

> ? **考えてみよう** なぜ Q は P から水平距離にして少なくとも d 離れていなければならないのか？

財布の水平位置が崖の面の位置にあるとき、財布は高さ h 以上になければならない。そうでなければ崖の面にぶつかる（あるいは縁の下を通る）からである。財布の高さは 0 から連続的に増えるので、その時点までにすでに高さ h に達している。つまり Q は E より浜辺側にあるか、E に一致する。P は E から水平距離 d だけ先にあるので、Q から P までの水平距離は少なくとも d である。

Q から P までの間、財布は速さ u で出発し、高さ h から再び高さ h まで運動する。上の到達距離の事実により、その間に進む水平距離は高々 u^2/g である。したがって

$$d \leq \frac{u^2}{g} = \frac{V^2 - 2gh}{g}, \qquad \text{すなわち} \qquad V^2 \geq g(2h + d).$$

条件は十分である

次に $V^2 \geq g(2h+d)$ と仮定する。すると $u^2 = V^2 - 2gh \geq gd > 0$ であるから $gd/u^2 \leq 1$ となり、$0 < \alpha \leq 45^\circ$ かつ

$$\sin 2\alpha = \frac{gd}{u^2}.$$

を満たす角 α を選ぶことができる。速さ u で E を通過し、浜辺から遠ざかる向きに水平から角 α だけ上向きに運動する放物線（parabola）の軌道を考える。到達距離の事実により、この軌道は E から水平距離 $u^2 \sin 2\alpha / g = d$ だけ先で高さ h に戻ってくる。これはちょうど P である。E と P の間では軌道は高さ h より上にあるので、崖の上を越える。

この軌道を E から時間を逆向きにたどる。より早い時刻ほど、財布はより低く、より浜辺の上方の遠くにある（鉛直方向の速度はより大きく、上向きだったからである）。したがって軌道は、崖のふもとから正の水平距離だけ離れた浜辺上のある点で地面と交わる。E に達する前の軌道はすべて崖の面より浜辺側にあるので、さえぎるものはない。また浜辺は広いので、Padma はその点に立つことができる。エネルギー保存則により、その点での速さは $\sqrt{u^2 + 2gh} = V$ である。よって Padma がその点から軌道の方向に速さ V で投げれば、財布はこの軌道をたどって私のところに届く。

（ちょうど $V^2 = g(2h+d)$ のときは $\alpha = 45^\circ$ であり、財布は縁 E をかすめる。V がそれより大きいときは、$(0^\circ, 90^\circ)$ の範囲にうまくいく角が二つあり、どちらの場合も財布は縁の真上を厳密に上方で通過する。）

二つの部分を合わせると、Padma が財布を私のところへ投げ届けられるための必要十分条件は $V^2 \geq g(2h+d)$ であり、これが示すべきことであった。

検算

- $d = 0$ のとき、条件は $V^2 \geq 2gh$ となる。これはまさに、鉛直に投げ上げて高さ h に届くために必要な条件である。
- $h = 0$ のとき、条件は $V^2 \geq gd$ となる。これは水平な地面上での通常の最大到達距離の条件である。
- 崖の縁を無視すれば、Padma にとって最善なのは崖のふもとに立つことであり、すべての軌道の包絡放物線（bounding parabola）からは $V^2 \geq g\left(h + \sqrt{h^2 + d^2}\right)$ という条件しか得られない。$\sqrt{h^2 + d^2} \leq h + d$ であるから、これはより弱い条件である。したがって、実際に効いている制約は崖の縁である。
- 数値的には、$g = 9.8$、$h = 20$、$d = 15$ のとき臨界速度は $\sqrt{539} \approx 23.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ である。Padma は崖のふもとから約 11.4 m のところに立ち、投げた財布の運動を逐次的に

シミュレーションすると、財布は E をかすめて縁から 15.0 m 先に着地する。また、ランダムな h、V についてすべての投射角を走査したところ、軌道上の高さ h の二点の間の水平距離の最大値は $(V^2 - 2gh)/g$ であることが確かめられた。

よくある間違い

- 崖のふもとから見た点 P に対する包絡放物線だけを用いること。これは崖の縁を無視しており、得られる条件は必要条件ではあるが十分条件ではない。
- 一方向しか証明しないこと。十分性の証明には具体的な投げ方を示すことが必要であり、それが浜辺から出発し、崖にぶつからないことの確認も含まれる。

STEP のその先へ

運動を高さ h で仕切り直すという工夫がうまくいくのは、運動方程式が時間の推移や水平方向の平行移動によって変わらないからであり、そのため軌道上のどの点も新たな投射点とみなすことができる。「どの目標に届くか？」という形の問題は、曲線族の包絡線（envelope）に関する問題である。障害物があるときには、どの制約が最初に効いてくるかによって答えが決まる。この考え方は、最適化（optimisation）や変分法（calculus of variations）にも再び現れる。放物運動とエネルギーを用いた方法について次に学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。