解答例

STEP II 1992、第 10 問

純粋数学 • 複素数平面上の軌跡

> **STEP II 1992、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q10

鍵となる考え方

$\dfrac{z-1}{z} = \dfrac{1-z}{0-z}$ と書く。その偏角（argument）は、方向 $z \to 0$ から方向 $z \to 1$ まで反時計回りに測った角である。したがって偏角を固定することは、0 から 1 への線分が z において張る角（subtend する角）を固定することにほかならず、あとは円の定理（circle theorems）、すなわち同じ弧に対する円周角（angles in the same segment）や円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）の対角の性質が仕事を引き受けてくれる。最後の小問も同じ考え方で、0 から 1 への線分の代わりに弦（chord）z_4z_2 を用いればよい。

解答

（問題文には誤植がある。条件は $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$ のつもりである。）

すべての仕事は二つの事実が担う。第一に、$\arg\dfrac{z-1}{z} = \arg(1-z) - \arg(0-z)$ であるから、この偏角は z における、直線 $z0$ から直線 $z1$ まで反時計回りに測った角を表す。第二に、これによって z が実軸のどちら側にあるかがわかる：

$$\operatorname{Im}\frac{z-1}{z} = \operatorname{Im}\left(1-\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(-\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}.$$

よって $\arg\frac{z-1}{z} \in (0,\pi)$ となるのはちょうど $\operatorname{Im} z > 0$ のときであり、$(-\pi,0)$ に属するのはちょうど $\operatorname{Im} z < 0$ のときである。実軸上の点では商が実数（偏角は 0 または π）となり、$z = 0,1$ では偏角はそもそも定まらない。

小問 (i)

このとき $\operatorname{Im} z > 0$ であり、0 から 1 への線分は z において角 α を張る。固定された弦が一定の角を張るような実軸より上の点全体は、弦の両端を通る円の弧をなす（同じ弧に対する円周角は等しい）。逆に、その弧上のどの点からも弦は角 α で見え、しかもその点は弦より上にあるので向きは反時計回りである。よって弧全体が軌跡（locus）に含まれる。

円を確定させよう。中心角は 2α であるから、長さ 1 の弦に対して半径は $\dfrac{1}{2\sin\alpha}$ となり、中心は $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 上の高さ $\frac{1}{2}\cot\alpha \geq 0$ の位置にある。軌跡は円

$$\left|z - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\cot\alpha\right| = \frac{1}{2\sin\alpha}$$

のうち実軸より上にある弧であり、端点 0 と 1 は除く。$\alpha \leq \frac{1}{2}\pi$ であるから、これは優弧（major arc）である。$\alpha = \frac{1}{2}\pi$ のときは、0 から 1 を直径とする上半円となる（半円に対する円周角）。

小問 (ii)

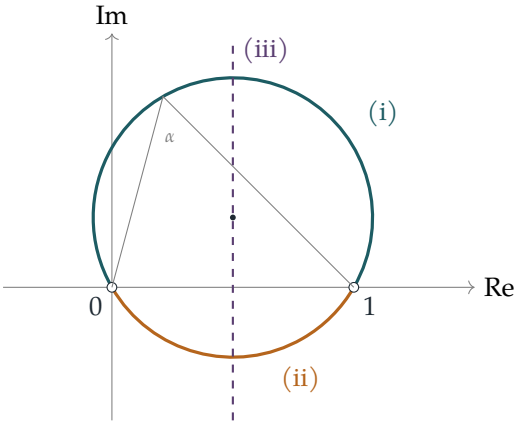
今度は偏角 $\alpha - \pi$ が $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ に属するので $\operatorname{Im} z < 0$ であり、弦は z において大きさ $\pi - \alpha$ の角を時計回りに張る。

考えてみよう 実軸より下で弦が角 $\pi - \alpha$ を張るのは、どの円か？

(i) と同じ円である。P が (i) の弧上にあり、Q がその円のもう一方の弧上にあるとき、$0PQ1$（適切な順に並べたもの）は P と Q が対頂点となる円に内接する四角形であるから、P と Q における角の和は π である。よって、実軸より下の劣弧（minor arc）こそがちょうど角が $\pi - \alpha$ となる場所である。軌跡は (i) の円のうち実軸より下にある弧であり、やはり 0 と 1 を除く。小問 (i) と (ii) を合わせると、0 と 1 を除いた円全体になる。（$\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ならば、(ii) は下半円である。）

小問 (iii)

$\left|\frac{z-1}{z}\right| = 1$ は、$z \neq 0$ のもとで $|z-1| = |z|$ を意味する。すなわち z は 0 と 1 から等距離にある。軌跡は垂直二等分線（perpendicular bisector）、すなわち直線 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ である。



図は $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ の場合である。ティール色の優弧が (i)、アンバー色の劣弧が (ii)、プラム色の破線が (iii) であり、白抜きの丸は除外される点 0 と 1 を表す。

最後の小問

$f(z) = \dfrac{z - z_2}{z - z_4}$ とおく。$(z_1 - z_4)(z_3 - z_2) = (z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$ であるから、

$$\frac{f(z_1)}{f(z_3)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)} = w,$$

となり、$\arg w = \arg f(z_1) - \arg f(z_3)$（$2\pi$ を法として）が成り立つ。

関数 f は、小問 (i) と (ii) の関数を新しい座標で表したものである。$z = z_4 + (z_2 - z_4)u$ とおく。これは回転と拡大に平行移動を続けたもので、$u = 0, 1$ をそれぞれ z_4, z_2 に移す。このとき

$$f(z) = \frac{(z_2 - z_4)(u - 1)}{(z_2 - z_4)u} = \frac{u - 1}{u}.$$

4 点を通る円は、u 平面における 0 と 1 を通る円に対応する。

考えてみよう なぜ z_1 と z_3 は異なる弧の上にあるのか？

4 点は円周上を z_1, z_2, z_3, z_4 の順に並んでいるので、弦 z_2z_4 は円を二つの弧に分け、一方が z_1 を、他方が z_3 を含む。u 平面では、そのうち一方が実軸より上に、他方が下にある。

(i) と (ii) から、$\frac{u-1}{u}$ の偏角は上側の弧では一定値 $\beta \in (0, \pi)$ をとり、下側の弧では値 $\beta - \pi$ をとる。ここでは $\beta \leq \frac{1}{2}\pi$ を仮定していない。上で述べた円の定理による議論は、その制限を一度も使っていないからである。したがって

$$\arg w = \arg f(z_1) - \arg f(z_3) = \pm\big(\beta - (\beta - \pi)\big) = \pm\pi \pmod{2\pi},$$

であり、w は実数、しかも実際には負である。 ■

検算

正方形 $z_1 = 1, z_2 = \mathrm{i}, z_3 = -1, z_4 = -\mathrm{i}$ については $w = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{-(1-\mathrm{i})^2}{-(1+\mathrm{i})^2} = \dfrac{-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = -1$ となり、これは負の実数である。(i) については、$\alpha = \frac{1}{2}\pi$、$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ とすると、$\frac{z-1}{z} = \frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ であり、その偏角は $\frac{1}{2}\pi$ である。さらに、いくつかの α の値について各弧が述べたとおりの偏角をもつこと、およびランダムな円上に順に並んだ 4 点の組 10^4 個について w が負の実数であることを数値的に確認した。

よくある間違い

- (i) の答えとして円全体を挙げてしまう。正しい偏角をもつのは一方の弧だけであり、もう一方の弧では偏角は $\alpha - \pi$ となる。これはまさに小問 (ii) である。
- 偏角が定義されない点 0 と 1 を除き忘れる。
- $(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$ の負号の扱いを誤り、$\arg w$ の符号を間違える。上のように負号を対にして処理すれば、この誤りは避けられる。

STEP のその先へ

量 w は（符号と順序の違いを除いて）4 点の**複比**（cross-ratio）である。複比はすべてのメビウス（Möbius）変換 $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ で不変であり、4 点が一つの円または直線上にあるのは、ちょうどその複比が実数のときである。メビウス変換は円と直線を円と直線に移すので、これは 4 点が同一円周上にあること（共円性、concyclicity）を証明する見事な方法となる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）は、この幾何学的な見方を美しく展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。