解答例

STEP II 1992、第 1 問

純粋数学 • 数列の極限

> **STEP II 1992、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q1

鍵となる考え方

どの極限（limit）にも標準的な手法が一つずつ必要であり、問われているのは正しい手法を選び取る力である。有理関数（rational function）なら、分子と分母を n の最高次の冪で割る。有界なものを増大するもので割った形なら、はさみうち（squeeze）を用いる。既知の極限が姿を変えて現れているなら、置換によってその変装をはがす。そして平方根の差なら、共役（conjugate）を掛ける。そうすれば、ほぼ等しい二つの量の差が、様子のはっきり見える商に変わる。

解答

小問 (i)

分子と分母を n で割ると、

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{1+0} = 1,$$

となる。$\frac{1}{n} \to 0$ だからである。極限は 1 である。

小問 (ii)

最高次の冪は n^2 であり、これは分母にしか現れない。分子と分母を n^2 で割ると、

$$\frac{5n+1}{n^2-3n+4} = \frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

極限は 0 である。分母は n^2 のように増大するが、分子は n のようにしか増大しない。

小問 (iii)

大きな整数 n に対する $\sin n$ について、有界（bounded）であること、すなわち $|\sin n| \leq 1$ であること以外に役立つことは何もわからない。しかしそれで十分である。なぜなら

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

だからである。したがって $\dfrac{\sin n}{n}$ は $-\frac{1}{n}$ と $\frac{1}{n}$ にはさまれ、そのどちらも 0 に収束するので、極限は 0 である。

小問 (iv)

考えてみよう これは (iii) と同じではないか？

そうではない。ここでは角 $1/n$ は増大するのではなく、0 へと縮んでいく。$x = 1/n$ とおく。$n \to \infty$ のとき $x \to 0^+$ であり、式は $\dfrac{\sin x}{x}$ となる。$x \to 0$ のときのその極限は、標準的な結果

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

である。（一つの見方として、これは sin の 0 における微分係数、すなわち導関数（derivative）の値 $\cos 0 = 1$ である。あるいは $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$ を用いれば $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$ となる。）極限は 1 である。

小問 (v)

$n \to \infty$ のとき $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$ である。なぜなら、下から $\theta \to \frac{\pi}{2}$ とすると $\tan\theta \to +\infty$ であり、arctan は連続（continuous）かつ増加関数だからである。極限 $\frac{\pi}{2}$ は 0 でないので、逆数をとってよい。

$$(\arctan n)^{-1} \longrightarrow \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

$(\arctan n)^{-1}$ は $1/\arctan n$ を意味するのであって、arctan の逆関数（inverse function）（それなら単に tan になってしまう）ではないことに注意せよ。

小問 (vi)

分子も分母も 0 に収束するので、それぞれの極限を別々にとるだけでは済まない。それぞれに共役を掛ける。

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \qquad \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}.$$

よって、分子と分母を $\sqrt{n}$ で割ると、

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)},$$

となる。$n \to \infty$ のとき、どちらの平方根も 1 に収束する（$\sqrt{\ }$ は連続だからである）ので、極限は

$$\frac{1+1}{2(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

である。

考えてみよう 答えが、たとえば 1 ではなく $\frac{1}{2}$ になるのはなぜか？

大きな n の近くでは、$\sqrt{x}$ のグラフは傾き $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ のほぼ直線である。したがって $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$（幅 1 の一歩）、$\sqrt{n+2}-\sqrt{n} \approx \frac{2}{2\sqrt{n}}$（幅 2 の一歩）となり、比はおよそ $\frac{1}{2}$、すなわち一歩の幅の比になる。

検算

大きな n を代入してみる。$n = 10^6$ とすると、(i) は 0.999999、(ii) は 5×10^{-6}、(iii) は約 -3.5×10^{-7}、(iv) は小数第 7 位まで 1.0000000、(v) は 0.636620 となり $2/\pi \approx 0.636620$ と一致する。そして (vi) は有理化（rationalise）した形から計算すると 0.50000012 となる。(vi) では、小さな n で有理化した形をもとの形と照合することもしておく。$n = 1$ では、どちらも $(\sqrt{2}-1)/(\sqrt{3}-1) \approx 0.5658$ に等しい。

よくある間違い

- (iii) と (iv) を同じように扱うこと。(iii) では正弦は有界のままで分母が増大するが、(iv) では分子も分母も 0 に縮み、その比が 1 に収束する。
- (v) の $(\arctan n)^{-1}$ を逆関数と読んでしまうこと。
- (vi) を、非常に大きな n でもとの形のまま電卓で計算すること。ほぼ等しい数どうしの引き算で精度が失われる。先に有理化せよ。

STEP のその先へ

大学では、「$a_n \to L$」は厳密に定義される。すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある N が存在して、$n > N$ を満たすすべての n について $|a_n - L| < \varepsilon$ が成り立つ、ということである。上で用いた手法、たとえば (iii) のはさみうち、(v) で 0 でない極限の逆数を

とること、(vi) で極限を連続関数の中に通すことは、どれも解析学（analysis）の最初の講義でこの定義から証明される定理となる。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、これらの考え方を丁寧に、読みやすく展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。