解答例

# STEP I 1992、第 9 問

純粋数学 ・ 微分方程式

> **STEP I 1992、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q9

## 鍵となる考え方

すべては一つの式から導かれる。すなわち、水の**体積**（volume）の変化率は（流入する割合）から（流出する割合）を引いたものに等しい。相似な三角形（similar triangles）を用いると、体積は深さ $x$ の簡単な関数として表されるので、連鎖律（chain rule）によってこれは $x$ についての微分方程式（differential equation）になる。前半ではこの方程式はきれいに変数分離できる。後半では方程式を解くのではなく、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ の符号と、それが 0 になる深さから振る舞いを読み取る。

## 解答

### 円錐から水が抜ける場合

水の深さが $x$ cm のとき、水はフィルター全体と相似な、高さ $x$、半径 $r$ の小さな円錐を満たしている。相似な三角形より $r/x = a/H$ であるから $r = ax/H$ であり、水の体積は

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{\pi a^2 x^3}{3H^2}.$$

である。連鎖律により

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

水は割合 $Ax$ で流出するだけなので、$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = -Ax$ である。よって

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Ax \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{AH^2}{\pi a^2},$$

となる。ここで $x$ で割ったが、これは円錐の中にまだ水がある間（$x > 0$）は許される。左辺は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}x^2)$ であるから、$\frac{1}{2}x^2$ は**一定の**割合 $AH^2/(\pi a^2)$ で減少する。その値は $\frac{1}{2}h^2$

から始まり、0 に達したとき円錐は空になるので、かかる時間は

$$T = \frac{\frac{1}{2}h^2}{AH^2/(\pi a^2)} = \frac{\pi a^2 h^2}{2AH^2} \text{ 秒},$$

であり、これが示すべきことであった。（同じことであるが、変数分離（separation of variables）によって $\int_h^0 x\,\mathrm{d}x = -\frac{AH^2}{\pi a^2}\int_0^T \mathrm{d}t$ としてもよい。）

### 水を注ぎ入れる場合

今度は $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = B - Ax$ であるから

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B - Ax, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{H^2(B-Ax)}{\pi a^2 x^2}.$$

$x > 0$ より因子 $H^2/(\pi a^2 x^2)$ は正であるから、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ の符号は $B - Ax$ の符号と一致する。$c = B/A$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} > 0 \text{ となるのは} x < c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ となるのは} x = c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < 0 \text{ となるのは} x > c.$$

したがって $x = c$ は流入と流出がちょうど釣り合う平衡（equilibrium）の深さであり、水位は常に $c$ に**向かって**動く。これがフィルターの内部で物理的に実現できるのは $c \le H$ のときに限られるので、場合分けは $c$ を $h$ および $H$ と比較することで決まる。

> **考えてみよう** 水位が $c$ に向かって動くとき、実際に $c$ に到達するのだろうか。それとも行き過ぎるのだろうか。

行き過ぎることはない。$c$ を通り越すためには、まず $c$ に等しくならなければならないが、そこでは $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ である。実は、有限の時間で $c$ に到達することもない。$t$ を $x$ の関数とみなすと、$h$ から $h$ と $c$ の間の深さ $X$ に達するまでの時間は

$$t = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{H^2(B-Ax)}\,\mathrm{d}x = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{AH^2(c-x)}\,\mathrm{d}x.$$

である。$x = c$ の近くでは被積分関数（integrand）は $\dfrac{\pi a^2 c^2}{AH^2}\cdot\dfrac{1}{c-x}$ のように振る舞い、その積分は $-\ln(c-x)$ の定数倍である。これは $X \to c$ のとき無限大に発散する。したがって水位はますますゆっくりと $c$ に近づき、「無限の時間の後に」しか到達しない。どちらの側から近づく場合も同じ議論が成り立つ。

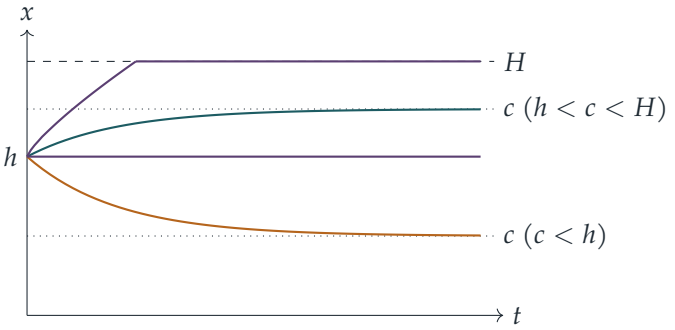
以上より、場合分けは次のようになる。

- $B < Ah$（したがって $c < h$）。最初は $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t < 0$ であり、水位は次第に遅くなりながら下がり、$c = B/A$ に上から近づくが到達はしない。特に、前半とは異なり、円錐が空になることはない（$c > 0$ であるから）。

- $B = Ah$（したがって $c = h$）。このときは最初から $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ である。水は流出するのと同じ速さで流入し、水位は $h$ のままである。
- $Ah < B < AH$（したがって $h < c < H$）。水位は次第に遅くなりながら上がり、$B/A$ に下から近づく。水位は $H$ より下にとどまるので、フィルターからあふれることはない。
- $B = AH$（したがって $c = H$）。水位は縁に向かって上がり $H$ に近づくが、上の議論により決して到達しないので、（このモデルでは）あふれることはない。
- $B > AH$（したがって $c > H$）。このときすべての $x \leq H$ に対して $B - Ax \geq B - AH > 0$ であり、また $x^2 \leq H^2$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \geq \frac{H^2(B - AH)}{\pi a^2 H^2} = \frac{B - AH}{\pi a^2} > 0.$$

となる。水位の上昇速度は正の定数で下から押さえられるので、水位は有限の時間、高々 $\pi a^2(H - h)/(B - AH)$ 秒で縁に達する。その後フィルターはあふれる。水位は $H$ のままで、余分な $B - AH\ \mathrm{cm^3\,s^{-1}}$ が上からこぼれ出る。




この図は典型的な振る舞いを示している。$c$ まで下がる場合（琥珀色）、$h$ のままか有限時間の後にあふれる場合（紫）、$c$ まで上がる場合（青緑）である。

## 検算

- $B = 0$ とおくと $c = 0$ となり、水位は 0 に向かって下がる。これは前半と一致する（前半では水位は実際に 0 に**到達する**。流出 $Ax$ は $x$ に比例する一方、体積は $x^3$ のように振る舞うので、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -AH^2/(\pi a^2 x)$ は 0 に収束しないからである）。
- 数値的に $a = 3$、$H = 8$、$A = 0.7$、$h = 5$ とすると、公式から $T \approx 7.889\,\mathrm{s}$ が得られ、$x^2$ を時間について逐次計算しても同じ値になる。後半の方程式を数値的に積分すると、それぞれの場合が確認できる。たとえば $B/A = 9 > H$ のとき水位は約

41.5 s 後に $H$ に達し、$B/A = 7$ のときは、7 との差が $\varepsilon$ 以内になるまでの時間が、$\varepsilon$ を 10 で割るごとに約 71 s ずつ増える。これは上で予測した対数的な増加である。

## よくある間違い

- 高さ $x$ の相似な円錐の体積ではなく、円柱の体積 $\pi a^2 x$ を使ってしまう。
- 水位が有限の時間で $B/A$ に到達する、あるいは行き過ぎて振動する、と主張してしまう。
- 縁のことを忘れる。平衡 $B/A$ に向かえるのは $B/A \leq H$ のときだけであり、そうでなければフィルターはあふれる。

## STEP のその先へ

後半は微分方程式の**定性的**理論（qualitative theory）の入り口である。$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x)$ に対しては、何も解かずに、平衡点（$f$ の零点）を求め、その両側での $f$ の符号から安定性（stability）を判定し、解の一意性（uniqueness）を用いて平衡点には近づくが決して横切らないことを示すことができる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は、この考え方に沿って自励系の方程式（autonomous equations）と安定性を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。