解答例

STEP I 1992、第 8 問

純粋数学 • 微分積分学の基本定理

> **STEP I 1992、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q8

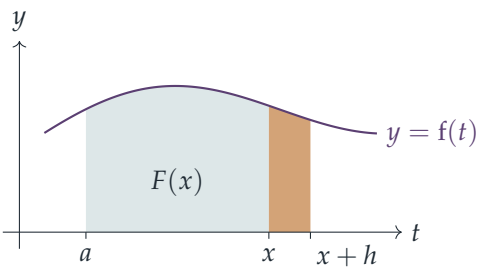
鍵となる考え方

上端が変数である積分は、上端が動くにつれて増えていく面積であり、その増え方の速さは上端における曲線の高さに等しい。この一つの事実（微分積分学の基本定理（Fundamental Theorem of Calculus））によって、問題に現れる各積分方程式（integral equation）は微分方程式（differential equation）に書き換えられる。微分すると定数についての情報が失われるので、もとの方程式に都合のよい x の値（たいていは $x = 0$）を代入して、その情報を必ず取り戻すことにする。

解答

積分の導関数

$F(x) = \int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ とおく。これは $t = a$ から $t = x$ までの $y = \mathrm{f}(t)$ の下の面積である。x を小さな量 h だけ増やすと、幅 h の細い帯が付け加わる。



この帯の面積は $F(x+h) - F(x)$ である。f が連続（continuous）ならば、$[x, x+h]$ 上で曲線は $\mathrm{f}(x)$ から小さな量 $\varepsilon(h)$ 以内にとどまる。ここで $h \to 0$ のとき $\varepsilon(h) \to 0$ であ

る。したがって、帯は高さ $\mathrm{f}(x) \pm \varepsilon(h)$ の長方形の間に挟まれる。

$$(\mathrm{f}(x) - \varepsilon(h))h \le F(x+h) - F(x) \le (\mathrm{f}(x) + \varepsilon(h))h.$$

$h > 0$ で割り（$h < 0$ の場合も、帯が左側にあるだけで同様である）、$h \to 0$ とすると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \mathrm{f}(x).$$

a が現れないことに注意しよう。下端を変えても、F に定数が加わるだけである。

方程式 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + 1$

上の結果から右辺は微分可能なので、f も微分可能であり、両辺を微分すると

$$\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x).$$

もとの方程式に $x = 0$ を代入すると、積分は長さ 0 の区間上のものになるので、$\mathrm{f}(0) = 1$ である。

> **考えてみよう** $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$ の解が e^x の定数倍以外にないことは、どうすればわかるだろうか？

$g(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$ を考える。積の微分法則（product rule）により

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(x)) = 0,$$

であるから g は定数であり、$g(0) = \mathrm{f}(0) = 1$ である。よって $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x) = 1$、すなわち求めるとおり $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^x$ である。（逆に、$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + 1 = \mathrm{e}^x - 1 + 1 = \mathrm{e}^x$ であるから、これは確かに解である。）

方程式 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$

前とまったく同様に $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$ であるから、$\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$ は定数である。しかし今度は $x = 0$ とすると $\mathrm{f}(0) = 0$ となるので、その定数は 0 であり、解は

$$\mathrm{f}(x) = 0 \quad \text{すべての} x.$$

に限る。前の方程式の「+1」こそが指数関数の大きさを決めていたのであり、それがなければ零関数しか残らない。

最後の小問

両辺を x で微分する。右辺では x が今度は下端になっており、

$$\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^x t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{f}(x).$$

したがって

$$\mathrm{f}(x) = -x^2\mathrm{f}(x) + 1 - x^4,$$
$$(1+x^2)\,\mathrm{f}(x) = 1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2).$$

$1+x^2 > 0$ であるからこれで割ることができ、

$$\mathrm{f}(x) = 1 - x^2.$$

C を求めるために、与えられた方程式に $x = 0$ を代入する。左辺と項 $x - \frac{x^5}{5}$ は消えて、

$$0 = \int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t + C = \left[\tfrac{t^3}{3} - \tfrac{t^5}{5}\right]_0^1 + C = \tfrac{2}{15} + C,$$

が残る。よって求めるとおり $C = -\frac{2}{15}$ である。

考えてみよう 微分してわかるのは、両辺の導関数が等しいということだけである。$\mathrm{f}(x) = 1 - x^2$、$C = -\frac{2}{15}$ は本当にすべての x で方程式を満たすだろうか？

満たす。この f に対して両辺はすべての x で導関数が等しいので、両辺の差は定数である。そして C は、まさに $x = 0$ で両辺が一致するように選んだのであった。したがって両辺はいたるところで一致する。逆に、どの解も微分した方程式を満たさなければならないので、f としてありうるのは $1 - x^2$ だけである。

検算

- $x = 1$ のとき：左辺は $\int_0^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$、右辺は $0 + 1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ である。一致する。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t \approx 0.133333 = \frac{2}{15}$ が得られ、最後の方程式の両辺は $x = -1.3,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.9,\ 2$ において 10^{-10} の精度で一致する。

よくある間違い

- 変数が**下端**にあるときのマイナス符号を忘れる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t = -g(x)$。
- $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$ を解いて $A\mathrm{e}^x$ で止めてしまう：A を決めるのは、$x = 0$ におけるもとの積分方程式である。
- $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ のように、積分変数（ダミー変数（dummy variable））t と端点 x を混同した式を書く。

STEP のその先へ

未知関数が積分の中に現れる方程式を**積分方程式**という。ここで扱ったような端点が変数であるものはヴォルテラ（Volterra）方程式と呼ばれ、微分方程式の初期値問題（initial-value problem）と同値である。大学最初の解析学（analysis）の講義では、リーマン（Riemann）積分の定義から微分積分学の基本定理を丁寧に証明し、上の帯による議論は ε–δ 論法による証明になる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、これをとても読みやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。