解答例

STEP I 1992、第 7 問

純粋数学 • 整数値多項式

> **STEP I 1992、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q7

鍵となる考え方

係数（coefficients）が整数であることを証明しようとしてはならない。二次関数（quadratic function）の場合、係数は整数である必要がないからである。実際、$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ はすべての整数で整数値をとる。そうではなく、係数を与えられた整数値で表して元の式に代入し、$\mathrm{f}(n)$ を $\mathrm{f}(-1)$、$\mathrm{f}(0)$、$\mathrm{f}(1)$ の整数倍の和として表すのである。最後の小問は、原点を平行移動（shift of origin）すれば、真ん中の小問そのものになる。

解答

一次関数

$\mathrm{g}(0) = b$、$\mathrm{g}(1) = a + b$ であるから、$b = \mathrm{g}(0)$、$a = \mathrm{g}(1) - \mathrm{g}(0)$ であり、どちらも整数である。よって任意の整数 n に対して

$$\mathrm{g}(n) = an + b = \mathrm{g}(0) + n(\mathrm{g}(1) - \mathrm{g}(0)),$$

となる。これは整数どうしの積の和であるから、整数である。

二次関数

$p = \mathrm{f}(-1)$、$q = \mathrm{f}(0)$、$r = \mathrm{f}(1)$ とおく。これらはすべて整数である。このとき

$$p = A - B + C, \qquad q = C, \qquad r = A + B + C,$$

であり、これを解くと

$$C = q, \qquad B = \frac{r - p}{2}, \qquad A = \frac{p + r - 2q}{2}.$$

を得る。したがって A と B は整数である必要はなく、奇数の半分である可能性もある。これらを $\mathrm{f}(n) = An^2 + Bn + C$ に代入し、p、q、r の項ごとにまとめると

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(n) &= \frac{p+r-2q}{2}\,n^2 + \frac{r-p}{2}\,n + q \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\,p + (1-n^2)\,q + \frac{n(n+1)}{2}\,r.\end{aligned}$$

となる。

> **考えてみよう** p と r の係数は分母に 2 をもつ。それでも整数になるのはなぜか。

整数 n に対して、$n-1$ と n は連続する整数であるから、どちらか一方は偶数であり、$n(n-1)$ は偶数である。同様に $n(n+1)$ も偶数である。よって $\frac{1}{2}n(n-1)$ と $\frac{1}{2}n(n+1)$ は整数であり、$1-n^2$ も整数である。したがって $\mathrm{f}(n)$ は整数どうしの積の和となり、すべての整数 n に対して整数である。これが示すべきことであった。

（3 つの係数は、$-1, 0, 1$ のうち 1 つで 1、残りの 2 つで 0 となる二次式である。これはラグランジュ補間（Lagrange interpolation）にほかならない。）

最後の小問

α を実数とし、$\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(\alpha + x)$ と定める。展開すると

$$\mathrm{h}(x) = A(\alpha+x)^2 + B(\alpha+x) + C = Ax^2 + (2A\alpha + B)x + (A\alpha^2 + B\alpha + C),$$

となるので、h も実数係数の $A'x^2 + B'x + C'$ という形の関数である。真ん中の小問では、A、B、C について実数であること以外は何も用いていない。さて、

$$\mathrm{h}(-1) = \mathrm{f}(\alpha - 1), \qquad \mathrm{h}(0) = \mathrm{f}(\alpha), \qquad \mathrm{h}(1) = \mathrm{f}(\alpha + 1)$$

は仮定によりすべて整数である。よって真ん中の小問を h に適用すれば、すべての整数 n に対して $\mathrm{h}(n) = \mathrm{f}(\alpha + n)$ は整数である。具体的には

$$\mathrm{f}(\alpha+n) = \frac{n(n-1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha-1) + (1-n^2)\,\mathrm{f}(\alpha) + \frac{n(n+1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha+1).$$

である。

検算

- $\mathrm{f}(n)$ の式に $n = -1, 0, 1$ を代入すると、係数はそれぞれ $(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$ となり、p、q、r が再現される。

- 例 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ では $p = 0$、$q = 0$、$r = 1$ であり、式から $\mathrm{f}(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$、すなわち三角数（triangular numbers）が得られる。
- 数値で確かめる。$\alpha = \sqrt{2}$ とし、$\mathrm{f}(\alpha - 1) = 3$、$\mathrm{f}(\alpha) = -7$、$\mathrm{f}(\alpha + 1) = 11$ とすると、これらの点を通る二次式から $\mathrm{f}(\alpha + 5) = 363.000\ldots$ が得られ、$10 \cdot 3 - 24 \cdot (-7) + 15 \cdot 11 = 363$ と一致する。

よくある間違い

- A、B、C が整数でなければならないと主張すること。それらは整数である必要はなく、このことに依存した議論は誤りである。
- 最後の小問で、α が整数または有理数でなければならないことを示そうとすること。α は任意の実数でよく、重要なのは平行移動だけである。

STEP のその先へ

すべての整数で整数値をとる多項式は、二項係数（binomial coefficients）$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ の整数係数の一次結合とちょうど一致する。二次式の場合、これらは 1、x、$\frac{1}{2}x(x-1)$ であり、この結果は差分（finite differences）を用いて証明される。すなわち、次数 d の多項式は、連続する $d+1$ 個の整数で整数値をとれば、整数値多項式（integer-valued polynomial）である。同じ考え方が、数値解析（numerical analysis）におけるニュートン（Newton）の前進差分公式（forward-difference formula）の根底にもある。整数値関数と整除性（divisibility）についてさらに知りたければ、Davenport, *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。