解答例

STEP I 1992、第 6 問

純粋数学 • 小さな角の近似

> **STEP I 1992、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q6

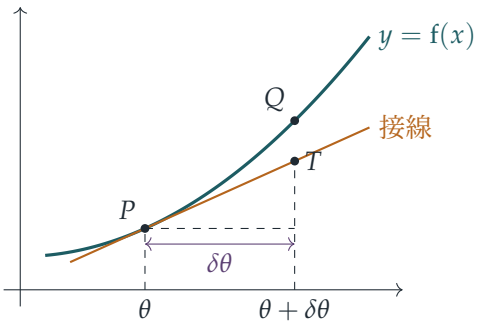
鍵となる考え方

遠方の点 C における角はちょうど ϕ である。$\theta + \phi$ が三角形 ABC の外角（exterior angle）だからである。すると正弦定理（sine rule）により AC が厳密に求まる。C は非常に遠くにあるので ϕ はごく小さいはずであり、小角近似（small-angle approximation）を用いると、厳密な式が簡単な形になる。小角近似とは、実は最初の部分の線形近似（linear approximation）が姿を変えたものにほかならない。誤差に関する問いは、同じ線形近似をもう一度、今度は ϕ を変数として用いるものである。

解答

線形近似

点 $P = (\theta, \mathrm{f}(\theta))$ の近くでは、f のグラフはその接線（tangent line）に非常に近い。この接線の傾きは $\mathrm{f}'(\theta)$ である。



右へ距離 $\delta\theta$ だけ進む。接線に沿うと、高さは（傾き）×（横の移動量）$= \mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta$ だけ増え、点 T に達する。曲線に沿うと、高さ $\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)$ の点 Q まで上がる。$\delta\theta \to 0$ のとき、差 QT は $\delta\theta$ 自身よりも速く小さくなる。なぜなら

$$\frac{\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)-\mathrm{f}(\theta)}{\delta\theta} \to \mathrm{f}'(\theta)$$

は、まさに導関数（derivative）の定義だからである。したがって $\delta\theta$ が小さいとき、

$$\mathrm{f}(\theta+\delta\theta) \approx \mathrm{f}(\theta) + \mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta.$$

C までの距離

三角形 ABC において、A における角は θ であり、B における外角は $\theta+\phi$ である。外角はそれと隣り合わない二つの内角の和に等しいので、

$$\angle ACB = \phi.$$

B における内角は $\pi-(\theta+\phi)$ であり、$\sin(\pi-x)=\sin x$ であるから、正弦定理により次の厳密な結果が得られる。

$$AC = \frac{a\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}, \qquad h = AC\sin\theta = \frac{a\sin\theta\,\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}.$$

考えてみよう 「h は a に比べて非常に大きい」という条件は、実際にはどこで効いてくるのか？

この条件は ϕ が小さいことを教えてくれる。厳密な式を変形すると $\sin\phi = a\sin\theta\sin(\theta+\phi)/h \le a/h$ となるので、$h \gg a$ であれば $\sin\phi$、したがって ϕ はごく小さくならざるを得ない。（非常に遠くにある C から見ると、基線（baseline）AB を見込む角はほとんどない。）ここで最初の部分を $\mathrm{f}=\sin$ として用いる：

$$\sin(\theta+\phi) \approx \sin\theta + \phi\cos\theta \approx \sin\theta, \qquad \sin\phi \approx \sin 0 + \phi\cos 0 = \phi.$$

したがって

$$h \approx \frac{a\sin^2\theta}{\phi},$$

となり、求める結果が得られる。また

$$AC = \frac{h}{\sin\theta} \approx \frac{a\sin\theta}{\phi}.$$

（$\phi\cos\theta$ の項を残すと $AC \approx a\sin\theta/\phi + a\cos\theta$ となる。余分な部分は a 程度の大きさにすぎず、h のオーダーの距離に比べれば無視できる。）

ϕ の誤差の影響

AC を関数 $g(\phi) = a\sin\theta\,\phi^{-1}$ とみなす。θ は正しく測定されるので固定しておく。最初の部分により、誤差 $\delta\phi$ によって推定値は次だけ変化する。

$$\delta(AC) \approx g'(\phi)\,\delta\phi = -\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,\delta\phi.$$

よって AC の誤差の大きさはおよそ $\dfrac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi|$ である。ϕ を過大に見積もると、距離は過小に見積もられる。

> **考えてみよう** a を 2 倍にするとどうなるか。式では a が分子にある。誤差も 2 倍になるのではないか？

そうではない。ϕ は固定されておらず、基線に依存するからである。点 C（したがって h）は変わらず、$h \approx a\sin^2\theta/\phi$ から $\phi \approx a\sin^2\theta/h$ が得られるので、a を 2 倍にすると ϕ もおよそ 2 倍になる。（C は非常に遠くにあるので、θ はごくわずかしか変わらない。）誤差を固定された量 h を用いて表すと、

$$\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi| \approx a\sin\theta\cdot\frac{h^2}{a^2\sin^4\theta}\,|\delta\phi| = \frac{h^2}{a\sin^3\theta}\,|\delta\phi|.$$

測定器の誤差 $\delta\phi$ が同じであれば、AC の誤差は a に反比例する。**望遠鏡どうしの距離を 2 倍にすると、誤差はおよそ半分になる。**

検算

- $a = 1$、$\theta = \pi/6$、$\phi = 10^{-4}$ とする。厳密な式からは $h \approx 2500.43$、$AC \approx 5000.87$ が得られ、近似式からは 2500 と 5000 が得られる。AC の差は約 $0.87 \approx a\cos\theta$ であり、まさに余分な項が予測するとおりである。
- 二本の視線の交点として C を直接計算すると、ランダムに選んだ数千組の a、θ と小さな ϕ に対して、両方の近似式と 0.1% 以内で一致する。また、小さな $\delta\phi$ による AC の変化も $-a\sin\theta\,\delta\phi/\phi^2$ と一致する。
- 遠方の点 C を固定し、基線 a と $2a$ のそれぞれについて ϕ を計算し直し、それぞれを同じ $\delta\phi$ だけずらすと、誤差の比は 2 になる。
- 次元（dimensions）：ラジアン（radians）で測った角は無次元なので、$a\sin^2\theta/\phi$ は長さである。

よくある間違い

- ϕ を度数法で測ったまま $\sin\phi \approx \phi$ を用いること。この近似は、sin の f′ と同様に、ラジアンを必要とする。
- ϕ を固定したまま考えて、誤差が a とともに 2 倍になると結論すること。目標物によって固定されるのは h であって、ϕ ではない。
- $\angle ACB = \phi$ に気づかず、代わりに座標を設定すること。それでも解けるが、時間がかかる。

STEP のその先へ

これは視差（parallax）による三角測量（triangulation）であり、天文学者が地球の公転軌道を基線として近くの恒星までの距離を測る方法である。誤差の解析は、誤差伝播（error propagation）への最初の一歩である。一次の近似では、測定値の誤差 δx は、その測定値から計算される任意の量において誤差 $g'(x)\,\delta x$ となる。この考え方は、剰余項（remainder term）付きのテイラーの定理（Taylor's theorem）によって厳密なものとなり、大学 1 年次の解析学（analysis）の中心的な部分をなす。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。