解答例

STEP I 1992、第 4 問

純粋数学 • 複素数平面上の軌跡

> **STEP I 1992、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q4

鍵となる考え方

それぞれの条件を x と y についての条件（ただし $z = x + \mathrm{i}y$）、あるいは z の絶対値（modulus）と偏角（argument）についての条件に書き直せば、たいていの場合、領域はすぐに見えてくる。小問 (i) と (ii) はこれだけで十分である。小問 (iii) は事情が異なる。これは**和**の集合を記述しているので、二つのことを示さなければならない。すなわち、どの和も主張する領域に属すること、そしてその領域のどの点も実際にそのような和として表せることである。

解答

以下では一貫して、x, y を実数として $z = x + \mathrm{i}y$ とおく。

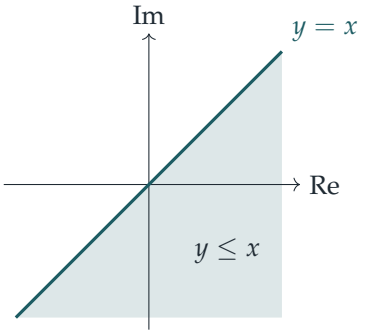
小問 (i)

展開すると

$$(1+\mathrm{i})z = (1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) = (x-y) + \mathrm{i}(x+y),$$

となるので、$\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})z) = x - y$ である。条件は $x - y \geq 0$、すなわち $y \leq x$ である。求める集合は、直線 $y = x$ 上およびその下側からなる閉半平面（closed half-plane）であり、直線そのものも含む。

幾何的には、$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ を掛けることは $\frac{\pi}{4}$ の回転と $\sqrt{2}$ 倍の拡大を表す。したがって条件は、z を反時計回りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させた点が右半平面 $\mathrm{Re} \geq 0$ に入る、ということを意味する。これは $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$（または $z = 0$）ということであり、同じ半平面を表している。



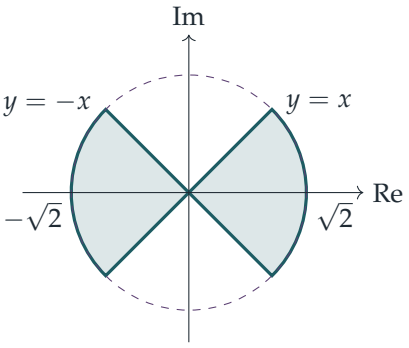
小問 (ii)

$|z^2| = |z|^2$ であるから、一つ目の条件は $|z|^2 \leq 2$、すなわち $|z| \leq \sqrt{2}$ である。これは原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の閉円板である。

二つ目の条件については、$z^2 = (x^2 - y^2) + 2\mathrm{i}xy$ より $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ なので、条件は $x^2 \geq y^2$、すなわち $|y| \leq |x|$ となる。これは直線 $y = x$ と $y = -x$ にはさまれ、実軸を含む、互いに向かい合った一対の閉扇形領域（sector）である。

極形式を使えば同じことがもっと手早くわかる。$z = re^{\mathrm{i}\theta}$ とすると $z^2 = r^2 e^{2\mathrm{i}\theta}$ なので、$r \leq \sqrt{2}$ かつ $\cos 2\theta \geq 0$ が必要であり、これより $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ または $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$（または $z = 0$）を得る。

求める集合はこれらの共通部分であり、二つの閉じた四分円板（それぞれ中心角 $\frac{\pi}{2}$、半径 $\sqrt{2}$ の扇形）が、一方は右向きに、他方は左向きに開いて、原点で接している。境界はすべて含まれる。



小問 (iii)

和全体の集合を S とする。S は閉円環（closed annulus）$\{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$ であることを示す。

どの和も円環に属する。 $|z_1| = 2$、$|z_2| = 1$ ならば、三角不等式（triangle inequality）

より

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2| = 3, \qquad |z_1+z_2| \ge |z_1|-|z_2| = 1.$$

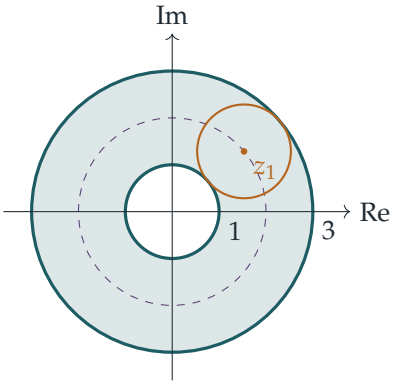
考えてみよう これで十分だろうか。円環の内部にある何かの曲線だけでなく、円環全体が埋め尽くされることはどうしてわかるのか。

これらの不等式は S が円環の**内部に含まれる**ことを示すにすぎないので、逆向きの包含関係も示す必要がある。$1 \le |z| \le 3$ を満たす任意の z をとる。$|z-z_2| = 2$ を満たす絶対値 1 の複素数 z_2 を見つけたい。そうすれば $z_1 = z - z_2$ の絶対値は 2 となり、$z = z_1 + z_2$ が成り立つからである。

幾何的には、z_2 は 0 を中心とする単位円上にあり、かつ z を中心とする半径 2 の円上にもなければならない。半径 1 と 2 の二つの円で、中心間の距離が $d = |z|$ であるものは、$2-1 \le d \le 2+1$ のときちょうど交わる。そしてこれがまさに条件 $1 \le |z| \le 3$ である。

円についてのこの事実を引用せずに確かめるには、$z = re^{i\alpha}$ と書き、φ について連続な関数 $f(\varphi) = |z - e^{i\varphi}|$ を考える。$\varphi = \alpha$ のとき点 $e^{i\varphi}$ は z と同じ向きを指すので、$f(\alpha) = |r-1| = r-1 \le 2$ である。$\varphi = \alpha + \pi$ のときは逆向きを指すので、$f(\alpha+\pi) = r+1 \ge 2$ である。中間値の定理（intermediate value theorem）により、ある φ で $f(\varphi) = 2$ となり、$z_2 = e^{i\varphi}$ が条件を満たす。

以上より、S はちょうど円 $|z| = 1$ と $|z| = 3$ にはさまれた閉円環であり、境界の二つの円はどちらも含まれる。次のように思い描くとよい。半径 2 の円上に z_1 を固定すると、$z_1 + z_2$ は z_1 を中心とする単位円を描く。z_1 が一周するにつれて、これらの小さな円が円環を掃き出していく。



琥珀色の円は、破線の円 $|z_1| = 2$ 上の一つの固定した z_1 に対する和を表している。

検算

- (i) で、$z = 1$ のとき $\mathrm{Re}(1+\mathrm{i}) = 1 \geq 0$、$z = \mathrm{i}$ のとき $\mathrm{Re}(-1+\mathrm{i}) = -1 < 0$ である。これは $y \leq x$ と一致する。
- (ii) で、$z = 1$ は集合に属し、$z = \mathrm{i}$ は属さない（$\mathrm{i}^2 = -1$）。したがって扇形は図のとおり実軸を含むはずである。
- (iii) で、$z_1 = 2$、$z_2 = -1$ からは 1、$z_1 = 2$、$z_2 = 1$ からは 3 が得られるので、境界の二つの円はどちらも実現される。三つの記述すべてを 200 000 個の無作為な点で検証した。無作為な和の絶対値は 1.0000 から 3.0000 の範囲にあり、円環内の無作為な 1000 個の点に対して、適切な z_2 が誤差 2×10^{-4} 以内で見つかった。

よくある間違い

- (ii) で、扇形 $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$ だけを残し、左側の扇形を忘れること。z と $-z$ の平方は等しい。
- (iii) で、三角不等式を示したところで止めてしまうこと。それは S が円環に含まれることを示すだけで、S が円環全体であることは示していない。
- 境界が含まれるかどうかを書き落とすこと。ここでの不等式はすべて等号付きなので、境界はすべて含まれる。

STEP のその先へ

小問 (iii) は、二つの集合のミンコフスキー（Minkowski）和（*Minkowski sum*）$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ の小さな例である。これは幾何学や凸解析（convex analysis）全体に通じる考え方である。二つの包含関係を示す論法（$S \subseteq T$ を示し、次に $T \subseteq S$ を示す）は、二つの集合が等しいことを証明する標準的な方法であり、大学ではこれを絶えず使うことになる。複素数の乗法を回転と拡大として捉える幾何的な見方を知れば (i) と (ii) はほとんど一瞬で解けるが、それについては Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。