解答例

STEP I 1992、第 3 問

純粋数学 ・ 奇関数と偶関数

> **STEP I 1992、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q3

鍵となる考え方

ここで扱う積分はすべて対称区間（symmetric interval）$[-\pi, \pi]$ 上のものなので、まず各被積分関数（integrand）が偶関数（even function）か奇関数（odd function）かを調べる。奇関数を対称区間で積分するとゼロになり、偶関数を積分すると $[0, \pi]$ 上の積分の 2 倍になる。しかもその区間では絶対値（modulus）の記号が外れる。この対称性に気づけば、4 つの小問はいずれも、たかだか 1 回の短い計算で済む。

解答

2 つの基本的な事実を用いる。$f(-x) = f(x)$（偶関数）ならば

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

であり、$f(-x) = -f(x)$（奇関数）ならば $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ である。どちらも、$[-a, 0]$ 上の積分で $x = -u$ と置換（substitution）すれば導かれる。この置換により、その積分は $\int_{0}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u$ となる。

また、$\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_{0}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$ も用いる。

小問 (i)

$|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$ であるから、被積分関数は偶関数である。$[0, \pi]$ 上では $\sin x \geq 0$ なので、そこでは $|\sin x| = \sin x$ となる。よって

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2 \times 2 = 4.$$

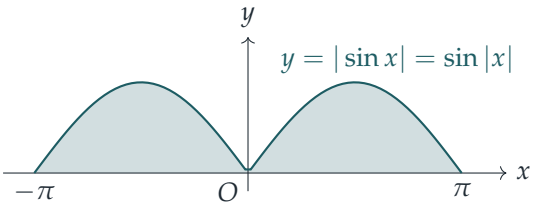
小問 (ii)

$|-x| = |x|$ であるから、関数 $\sin|x|$ は偶関数である。$[0, \pi]$ 上では $|x| = x$ なので

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x| \, \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 4.$$

考えてみよう (i) と (ii) の答えが一致するのは偶然だろうか。

偶然ではない。この区間上では、2 つの被積分関数は同じ関数なのである。$0 \leq x \leq \pi$ ではどちらも $\sin x$ に等しい。$-\pi \leq x \leq 0$ では $\sin x \leq 0$ なので $|\sin x| = -\sin x$ であり、一方 $\sin|x| = \sin(-x) = -\sin x$ も成り立つ。2 つの曲線が分かれるのは $[-\pi, \pi]$ の外側だけである。たとえば $x = 3\pi/2$ では $|\sin x| = 1$ であるが $\sin|x| = -1$ である。



網掛けの部分は正弦曲線の 2 つのアーチからなり、それぞれの面積は 2 である。

小問 (iii)

ここでは $(-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x\sin x$ であるから、被積分関数は偶関数である（2 つの奇関数の積）。したがって

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x \, \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} x\sin x \, \mathrm{d}x.$$

$u = x$、$\mathrm{d}v = \sin x \, \mathrm{d}x$（よって $v = -\cos x$）として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi} x\sin x \, \mathrm{d}x &= [-x\cos x]_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= (-\pi\cos\pi - 0) + [\sin x]_{0}^{\pi} \\ &= \pi + 0 = \pi.\end{aligned}$$

よって

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x \, \mathrm{d}x = 2\pi.$$

小問 (iv)

今度は $(-x)^{10}\sin(-x) = x^{10}(-\sin x) = -x^{10}\sin x$ であるから、被積分関数は奇関数である（偶関数と奇関数の積）。したがって対称区間上の積分は

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{10}\sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

部分積分を 10 回も繰り返す必要はない！$[-\pi, 0]$ からの寄与と $[0, \pi]$ からの寄与は大きさが等しく符号が逆なので、ちょうど打ち消し合う。

検算

- 面積としての感覚：(i) の被積分関数は負にならず、たかだか 1 であるから、答えは 0 と $2\pi \approx 6.28$ の間になければならない。4 はその範囲にある。
- (iii) では $[-\pi, \pi]$ 上で $x\sin x \geq 0$ なので、答えは正でなければならない。2π は正である。また $\sin x - x\cos x$ を微分すると $x\sin x$ となり、原始関数（antiderivative）が正しいことが確かめられる。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）で区間を 20 000 個に分割して計算すると、4 つの積分はそれぞれ 4.0000000、4.0000000、6.2831853、0.0000000 となる。(iv) のゼロは単に小さな数というわけではない。同じ区間での $|x^{10}\sin x|$ の積分はおよそ 13 275 であり、打ち消し合いが厳密かつ完全に起きているのである。

よくある間違い

- 絶対値を無視して $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_{-\pi}^{\pi} = 0$ と書いてしまう。決して負にならない被積分関数の積分が 0 になるのは、その関数がほとんど至る所（almost everywhere）でゼロである場合に限られる。
- $\sin x$ が奇関数だから $\sin|x|$ も奇関数だと思い込む。$|x|$ との合成（composition）は常に偶関数を生み出す。
- (iii) の部分積分での符号の誤り。$\cos\pi = -1$ であるから $-\pi\cos\pi = +\pi$ となることに注意せよ。

STEP のその先へ

関数を偶関数部分と奇関数部分に分解すること、すなわち $f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$ は、フーリエ級数（Fourier series）の出発点である。$[-\pi, \pi]$ 上で、

偶関数部分は余弦関数で、奇関数部分は正弦関数で展開され、(iii) や (iv) のような積分こそが係数（coefficient）を計算するのに使われるものである。たとえば、x のフーリエ級数における $\sin x$ の係数は (iii) の積分から得られる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）には、フーリエ級数とその微分方程式の解法への応用について、読みやすい入門がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。