解答例

STEP I 1992、第 2 問

純粋数学 • 魔方陣と数え上げ

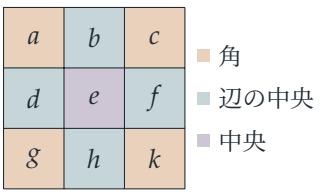
> **STEP I 1992、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q2

鍵となる考え方

すべては、直線上の和をうまく足し合わせることから得られる。3 つの行をすべて足すと、各数をちょうど 1 回ずつ使うことになり、そこから n が求まる。中央を通る 4 本の直線を足すと、各数を 1 回ずつ使い、さらに中央を 4 回使うことになり、これにより e が決まる。その後は、小規模で注意深い場合分け（case analysis）の問題になる。e が分かれば、中央を通る各直線は和が一定である 2 つの数を組にするので、大きな数を置ける余地はほとんど残らない。そして正方形の対称性（回転）が数え上げを代わりにやってくれる。

解答

マスを 3 種類に分けて名前をつけておくと便利である。4 つの**角**（corner）a, c, g, k、4 つの**辺の中央**（edge-middle）b, d, f, h、そして**中央**（centre）e である。



小問 (i)

3つの行を合わせると、9個の成分がそれぞれちょうど1回ずつ含まれる。したがって、3つの行の和を足し合わせると

$$3n = (a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+k) = 1+2+\cdots+9 = 45,$$

となり、よって $n = 15$ である。

小問 (ii)

中央を通る直線は4本ある。中央の行、中央の列、そして2本の対角線である。これらを足し合わせると

$$(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+k)+(c+e+g) = 4n = 60.$$

左辺では、e 以外の各成分はちょうど1回ずつ現れ、e は4回現れるので、左辺は $45+3e$ である。したがって $45+3e = 60$ となり、$e = 5$ を得る。

ここから有用な帰結が得られる。中央を通る各直線の和は15であり、$e = 5$ であるから、中央をはさんで**向かい合う**2つのマスの和は常に10である：

$$a+k = c+g = b+h = d+f = 10.$$

小問 (iii)

$e = 5$ であるから、9は中央には入らない。したがって、9が角に入りえないことを示せばよい。

背理法（proof by contradiction）により、9が角にあると仮定する。どの角についても議論は同じなので、$a = 9$ とする。すると向かい側の角は $k = 10-9 = 1$ である。上の行と左の列はどちらも a を通るので

$$b+c = 15-9 = 6 \qquad \text{かつ} \qquad d+g = 15-9 = 6.$$

4つの数 b, c, d, g は相異なり、1, 5, 9を使った残り、すなわち $\{2,3,4,6,7,8\}$ から選ばれる。この集合の**相異なる**2数の和として6を表す方法は $2+4$ しかない（$1+5$ はすでに置いた数を使い、$3+3$ は同じ数を繰り返すからである）。よって $\{b,c\} = \{2,4\}$ かつ $\{d,g\} = \{2,4\}$ となるが、これには2と4をそれぞれ2回ずつ使う必要がある。これは数が相異なることに矛盾する。

考えてみよう なぜ角 a だけを扱えば十分なのだろうか。

どの角についても、同じ3つの事実が成り立つ。向かい側の角は1でなければならず、その角を通って正方形の辺に沿う2本の直線では、それぞれ残り2つの成分の和が6

でなければならない。したがって同じ矛盾が現れる。（同じことであるが、魔方陣を 4 分の 1 回転させると別の魔方陣が得られ、回転によって a は他のそれぞれの角に移る。）

以上より、9 は中央でも角でもないので、b, d, f, h のいずれかでなければならない。

小問 (iv)

$b = 9$ とする。すると $h = 10 - 9 = 1$ であり、上の行から $a + c = 6$ である。(iii) と同様に、未使用の数は $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ であり、そこから選んだ相異なる 2 数で和が 6 となる組は $\{2, 4\}$ のみである。よって $a = 2$, $c = 4$ または $a = 4$, $c = 2$ のいずれかである。

a と c が定まれば、残りはすべて向かい合う組と左右の列によって決まる：

- $a = 2, c = 4$ のとき：$k = 10 - a = 8$, $g = 10 - c = 6$, $d = 15 - a - g = 7$, $f = 15 - c - k = 3$ である。
- $a = 4, c = 2$ のとき：$k = 6, g = 8, d = 15 - 4 - 8 = 3, f = 15 - 2 - 6 = 7$ である。

値が決まってしまうことから分かるのは、これらが**唯一の**候補であるということだけである。実際に条件を満たすことはまだ確かめなければならない。どちらの場合も成分は $1, \ldots, 9$ がちょうど 1 回ずつであり、すべての行・列・対角線の和は 15 である：

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

（たとえば 1 つ目では、行の和は 15, 15, 15、列の和は $2 + 7 + 6, 9 + 5 + 1, 4 + 3 + 8$、対角線の和は $2 + 5 + 8, 4 + 5 + 6$ である。）したがって、$b = 9$ である魔方陣（magic square）はちょうど 2 つであり、2 つ目は 1 つ目を中央の列について鏡映したものである。

小問 (v)

魔方陣を時計回りに 4 分の 1 回転させると、別の魔方陣が得られる。新しい行はもとの列であり、新しい列はもとの行（逆順に読んだもの）であり、2 本の対角線は入れ替わる。4 分の 1 回転は元に戻せる（反時計回りに戻せばよい）ので、魔方陣どうしの間の 1 対 1 対応（one-to-one correspondence）を与える。

時計回りの 4 分の 1 回転は、マス b をマス f に移す。よって $f = 9$ である魔方陣は、$b = 9$ である魔方陣を 4 分の 1 回転させたものとちょうど一致し、ちょうど 2 個ある。さらに回転させると、$h = 9$ であるものがちょうど 2 個、$d = 9$ であるものがちょうど 2 個ある。

(iii) より、どの魔方陣でも 9 は位置 b, f, h, d のちょうど 1 つにあるので、これら 4 つの

グループは互いに重ならず、すべてを尽くしている。したがって

$$4 \times 2 = 8$$

個の異なる 3×3 魔方陣が存在する。それらは (iv) の 2 つの方陣と、それらを 4 分の 1、2 分の 1、4 分の 3 回転させたものである。同じことであるが、1 つの方陣の 8 通りの回転と鏡映である。

検算

$1, \ldots, 9$ の $9! = 362\,880$ 通りの並べ方すべてを短いコンピュータ探索で調べると、魔方陣はちょうど 8 個見つかる。そのすべてで直線の和は 15、中央は 5 であり、すべてで 9 は辺の中央にあり、$b = 9$ である 2 つは (iv) で見つけた方陣である。手計算でも、どの方陣でも 1 が 9 の向かい側にあり、偶数 $2, 4, 6, 8$ が角を占めることを確かめられる。

よくある間違い

- (iv) で、決まった方陣が本当に魔方陣であることの確認を忘れること。推論から分かるのは、それ以外のものはうまくいかないということだけである。
- (v) で、回転によって新しい、本当に異なる方陣が得られる理由を説明せずに、あるいは (iii) を使って 4 つの場合が重なりなくすべてを尽くすことを確かめずに、「2」や「4」と答えること。

STEP のその先へ

小問 (v) は**群作用**（group action）への最初の入り口である。正方形の 8 つの対称性（4 つの回転と 4 つの鏡映）は群（group）をなし、魔方陣全体はこの群のもとでただ 1 つの軌道（orbit）をなす。このように対称性を除いて対象を数えることは、バーンサイドの補題（Burnside's lemma）で展開され、群論の最初の講義で学ぶ。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）は、最初に読むのに親しみやすい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。