解答例

STEP I 1992、第 16 問

確率・統計 ・ ネットワークの信頼性

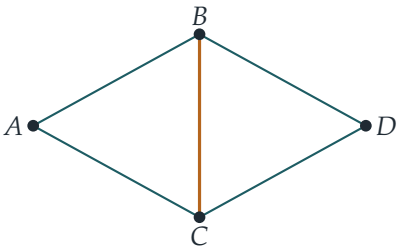
STEP I 1992、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s1-q16

鍵となる考え方

この道路網は「ブリッジ（bridge）」の形をしている。A から D へは B を経由する経路と C を経由する経路の二つがあり、その中央を道路 CB がつないでいる。ブリッジを扱う最もすっきりした方法は、CB が通行可能かどうかで条件付け（conditioning）することである。それさえわかれば、あとはすべて直列（series）と並列（parallel）の道路の問題に帰着するからである。ある道路に雪対策を施すことは、その両端を一つの町に融合するのと同じ効果をもつ。したがって、二つの案は、それぞれが生み出すより小さなネットワークを調べることで比較できる。



解答

以下を通して、ある道路が通行可能である確率を $q = 1 - p$ と書く。各道路は独立（independent）に通行止めになるので、通行可能な道路と通行止めの道路の特定のパターンが起こる確率は、p と q の積になる。同じ町を二度通らない A から D への経路は次の四つである。

$$ABD, \qquad ACD, \qquad ABCD, \qquad ACBD.$$

通行可能な経路が $ABCD$ だけである場合

$ABCD$ が通行可能であるためには、AB、BC、CD がすべて通行可能でなければならない。さらにそれが通行可能な**唯一の**経路であるためには、ABD が通れない必要があり、AB は通行可能なので BD が通行止めでなければならない。同様に ACD も通れない必要があり、CD は通行可能なので AC が通行止めでなければならない。このとき $ACBD$ も自動的に通れない（AC と BD の両方を使うからである）。

よってこの事象は、ちょうど「AB、BC、CD が通行可能で、AC、BD が通行止め」という事象である。独立性より、その確率は

$$q^3p^2 = p^2(1-p)^3,$$

となり、示すべき結果が得られた。

現状で通り抜けられる確率

A と D が通行止めでない道路で結ばれているという事象を E とし、道路 CB で条件付けする。

CB が通行可能な場合、B と C は一つの町のようにふるまう。AB と AC の両方が通行止めでない限り A からその町へ行くことができ、BD と CD の両方が通行止めでない限りその町から D へ行くことができる。これらは異なる道路に関する事象なので、

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 通行可能}) = (1-p^2)^2.$$

CB が通行止めの場合、ありうる経路は ABD と ACD だけであり、それぞれ確率 q^2 で通行可能で、共通の道路をもたないので互いに独立である。よって

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 通行止め}) = 1-(1-q^2)^2.$$

A が D から遮断される確率を扱うほうが簡単である。$1-(1-p^2)^2 = p^2(2-p^2)$ および $1-q^2 = p(2-p)$ であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{遮断}) &= q\,p^2(2-p^2) + p\cdot p^2(2-p)^2 \\ &= p^2[(1-p)(2-p^2) + p(4-4p+p^2)] \\ &= p^2\,(2+2p-5p^2+2p^3).\end{aligned}$$

どの道路に雪対策を施すか

CB に雪対策を施す場合。このとき CB は常に通行可能なので、常に上の一つ目の場合にあたる。

$$\mathrm{P}(\text{遮断}) = 1-(1-p^2)^2 = 2p^2-p^4.$$

AB に雪対策を施す場合。このとき A と B は一つの町としてふるまい、D から遮断されるのは、BD が通行止めで、**かつ** C を通る道もない場合にちょうど一致する。C を通る道には、CD が通行可能で、かつ AC、CB の少なくとも一方が通行可能であることが必要なので、これが失敗する確率は $p+q\,p^2$ である。したがって

$$\mathrm{P}(\text{遮断}) = p\,(p+qp^2) = p^2+p^3-p^4.$$

> **考えてみよう** どちらの答えも p^2 の項から始まる。すべての p に対してどちらが小さいかは、どのように判断すればよいだろうか。

差をとると、

$$(2p^2-p^4)-(p^2+p^3-p^4) = p^2-p^3 = p^2(1-p) > 0 \quad \text{ただし} 0<p<1.$$

よって、p の値によらず、AB に雪対策を施すほうが常に遮断される確率が小さくなる。政府は AB を選ぶべきであり、二つの選択肢が同等に良くなることは決してない。

これは直観とも合う。CB を補強しても、それが迂回路の一部として必要なときにしか役に立たない。一方、AB を補強すると A と B が一つの町になり、その町は直通の道路 BD と、C を経由する経路の両方によって D と結ばれる。

最後の小問

$p=\frac{1}{10}$ のとき、現状で遮断される確率は

$$\frac{1}{100}\left(2+\frac{2}{10}-\frac{5}{100}+\frac{2}{1000}\right) = \frac{1}{100}\times 2.152 = 0.02152.$$

これは $\frac{1}{100}$ より大きいので、政府は計画を実行する（そして前の小問より、AB に雪対策を施す）。

主要項 $2p^2=0.02$ だけで結論は決まる。ちょうど二本の道路が通行止めになることで遮断される場合が二通り、すなわち $\{AB,AC\}$ と $\{BD,CD\}$ があるからである。

検算

- $p\to 0$ のとき、遮断される確率はおよそ $2p^2$ であり、これは通行止めになると A または D が孤立する二組の道路を数えたものである。AB に雪対策を施すと組 $\{BD,CD\}$ だけが残り、およそ p^2 となって、求めた式と一致する。CB に雪対策を施しても両方の組が残り、およそ $2p^2$ となる。
- $p=1$ のとき、現状の式は $1\cdot(2+2-5+2)=1$ を与える。すべての道路が通行止めなら、確実に遮断される。

- 通行可能・通行止めの全 2^5 通りのパターンを厳密に数え上げると、いくつかの p の値について上のすべての式が確かめられる。$p = \frac{1}{10}$ では、現状で 0.02152、AB に雪対策を施した後で 0.0109、CB に雪対策を施した後で 0.0199 となる。2×10^5 回の冬をシミュレーションした結果は 0.0215 であった。

よくある間違い

- 四つの経路が通行可能である確率を足し合わせてしまう。経路は道路を共有しているので、これらの事象は重なり合い、和は数えすぎになる。
- 最初の小問で、「通行可能な唯一の経路」であるためには AC と BD が通行止めでなければならないことを忘れ、答えを $(1-p)^3$ としてしまう。
- 二つの案を $p = \frac{1}{10}$ だけで比較してしまう。差 $p^2(1-p)$ を見れば、すべての p について AB のほうが良いことがわかる。

STEP のその先へ

これは**ネットワーク信頼性**（network reliability）の小さな例であり、一本の辺で条件付けする（あるいはその両端を融合する）という技法は、グラフ理論（graph theory）全体を貫く削除縮約（deletion–contraction）の考え方である。大規模なランダムネットワークでは、同じ問いが**パーコレーション理論**（percolation theory）につながる。そこでは p に鋭い閾値（threshold）があり、その値で長距離の連結が突然消失する。ここで用いた条件付けの道具を身につけるには、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。