解答例

STEP I 1992、第 15 問

確率・統計 ・ 期待待ち時間

> **STEP I 1992、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q15

鍵となる考え方

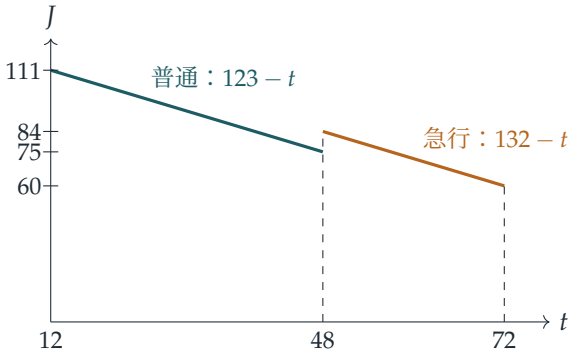
すべては 1 時間ごとに繰り返されるので、1 時間の区間上に一様分布（uniform distribution）する時刻に到着する乗客を考えれば十分である。その 1 時間は 2 つの間隔に分かれる。ある列車の前の間隔に到着した乗客は全員その列車に乗り、各乗客の所要時間は「待ち時間＋乗車時間」である。1 つの間隔の中では待ち時間は一様分布するので、その平均は間隔の半分である。これにより、問題全体が 1 つの間隔の長さについての 2 次式に帰着する。

解答

現在の時刻表

時刻 t を正午からの経過分で測り（どの時刻を基準にしてもよい）、乗客の到着時刻 T は長さ 1 時間の区間 $(12, 72]$ 上の一様分布に従うとする。この範囲にある列車は、48 に出発してロンドンに $48 + 75 = 123$ に着く普通列車と、72（すなわち次の時の 12 分）に出発して $72 + 60 = 132$ に着く急行列車である。

- $12 < T \leq 48$ ならば、最初に乗れる列車は普通列車なので、所要時間は $J = 123 - T$ である。
- $48 < T \leq 72$ ならば、最初に乗れる列車は急行列車なので、$J = 132 - T$ である。



T は $(12, 72]$ 上で密度（density）$\frac{1}{60}$ をもつので、

$$\mathrm{E}(J) = \frac{1}{60}\left[\int_{12}^{48}(123-t)\,\mathrm{d}t + \int_{48}^{72}(132-t)\,\mathrm{d}t\right].$$

被積分関数はいずれも 1 次式なので、各積分は区間の長さと中点での値の積に等しい：

$$\int_{12}^{48}(123-t)\,\mathrm{d}t = 36\times(123-30) = 3348, \qquad \int_{48}^{72}(132-t)\,\mathrm{d}t = 24\times(132-60) = 1728.$$

よって

$$\mathrm{E}(J) = \frac{3348+1728}{60} = \frac{5076}{60} = 84.6 \text{ 分},$$

となり、示すべきことが得られた。

急行列車の時刻の変更

次に、急行列車が毎時 x 分に出発し、普通列車は引き続き 48 分に出発するとする。急行列車の出発から次の普通列車の出発までの分数を d とおくと、$0 \le d < 60$ かつ $d \equiv 48 - x \pmod{60}$ である（元の時刻表では $d = 36$）。このとき 1 時間は次のように分かれる。

- 各普通列車の前にある長さ d の間隔：この乗客は $[0, d)$ 上で一様分布する時間 W だけ待ち、その後 75 分乗車する。
- 各急行列車の前にある長さ $60 - d$ の間隔：この乗客は $[0, 60-d)$ 上で一様に待ち、その後 60 分乗車する。

乗客が 1 つ目の間隔に入る確率は $\frac{d}{60}$、2 つ目に入る確率は $\frac{60-d}{60}$ であり、長さ g の間隔上の一様な待ち時間の平均は $\frac{g}{2}$ である。したがって、乗客がどちらの間隔に到着する

かで条件付け（conditioning）をすると、

$$\begin{aligned} 60\,\mathrm{E}(J) &= d\left(\frac{d}{2}+75\right)+(60-d)\left(\frac{60-d}{2}+60\right) \\ &= \frac{d^2}{2}+75d+\frac{3600-120d+d^2}{2}+3600-60d \\ &= d^2-45d+5400. \end{aligned}$$

確認として、$d=36$ とすると $1296-1620+5400=5076$ となり、前半の結果と一致する。

> **考えてみよう** 最適な間隔が、1 時間を等分する $d=30$ にならないのはなぜだろうか。

普通列車の間隔にいる乗客は、遅い列車に乗るために一人あたり 15 分の損をする。したがってその間隔に入る乗客を減らしたい。つまりその間隔を 30 分より短くしたいが、短くしすぎると急行列車の間隔（したがってその乗客たちの待ち時間）が長くなってしまう。2 次式はこの 2 つの効果の釣り合いをとっているのである。

平方完成（completing the square）をすると、

$$d^2-45d+5400=\left(d-\tfrac{45}{2}\right)^2+5400-\tfrac{2025}{4},$$

となり、これは $d=22.5$ のとき最小となる。この値は $[0,60)$ に含まれる。このとき $60\,\mathrm{E}(J)=\frac{19575}{4}$ なので、平均所要時間の最小値は

$$\mathrm{E}(J)=\frac{19575}{240}=\frac{1305}{16}=81\tfrac{9}{16}\approx 81.56 \text{ 分}.$$

である。急行列車は普通列車の 22.5 分前に出発しなければならないので、

$$x=48-22.5=25.5,$$

すなわち、急行列車は毎時 $25\frac{1}{2}$ 分に出発すべきである。出発時刻を整数の分に限るならば、$x=25$ と $x=26$（$d=23$ と $d=22$）が同等となり、いずれも $\frac{2447}{30}\approx 81.57$ 分を与える。

検算

- $d=0$ のとき 2 本の列車は同時に出発する。全員が急行列車に乗り、平均 30 分待つので、$\mathrm{E}(J)=90$ である。公式からは $\frac{5400}{60}=90$ が得られる。
- $d\to 60$ のとき、普通列車は急行列車の直前に出発し、ほぼ全員を乗せる。平均待ち時間 30 分、乗車時間 75 分で、合計 105 分である。公式からは $\frac{3600-2700+5400}{60}=105$ が得られる。

- 刻み幅 0.1 の格子上のすべての x について、所要時間を 1 時間にわたって数値積分（numerical integration）すると、$x = 12$ で 84.6、$x = 25.5$ で最小値 81.5625 が得られる。

よくある間違い

- 毎時 48 分から 60 分の間に到着した乗客を、1 時間を加えずに「12 分」の急行列車に乗せてしまうこと。彼らの乗る列車は**次の**時の 12 分に出発する。
- 2 つの所要時間を、間隔の長さではなく列車の本数で重み付けして平均してしまうこと。列車が何人の乗客を運ぶかを決めるのは、その列車の前の間隔の長さである。

STEP のその先へ

ここで計算した量は周期的な時刻表における平均待ち時間であり、長い間隔ほど多くの乗客を捕まえるという観察は**検査のパラドックス**（inspection paradox）の一形態である。すなわち、ランダムに到着する乗客は、短い間隔よりも長い間隔に入る可能性が高い。これは、ランダムな到着とサービスを研究する再生理論（renewal theory）や待ち行列理論（queueing theory）の中心的な考え方である。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、その基礎となる条件付けや期待値（expectation）の道具に出会うのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。