解答例

STEP I 1992、第 13 問

力学 ・ 脱出速度と動径方向の落下

STEP I 1992、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

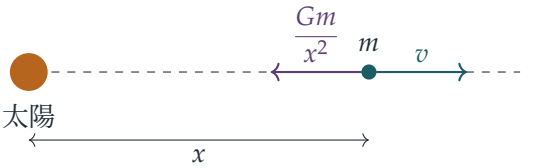
step.maths.org/questions/92-s1-q13

鍵となる考え方

力は距離 x のみに依存するので、自然な道具は運動方程式（equation of motion）を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ の形で書くことである。これはただちに積分でき、速さと距離を結びつけるエネルギー方程式（energy equation）が得られる。前半では、v^2 が決して負にならないという事実によって、この方程式が x の上限を与える。後半では、エネルギー方程式から $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ が x の関数として得られ、変数分離（separation of variables）によって時間が求まる。

解答

太陽は固定されているとし、彗星を質点とみなす。また、与えられた引力以外の力ははたらかないものとする。引力は彗星と太陽を結ぶ直線に沿ってはたらくので、太陽から真っすぐ遠ざかる向きに運動している（あるいは静止している）彗星は、その直線上を運動し続ける。したがって x は一直線上の座標であり、$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ とおいて、v が正のときは太陽から遠ざかる向きを表すものとする。



エネルギー方程式

直線に沿ってニュートン（Newton）の第二法則を適用すると、力は太陽に向かう向き（x が減少する向き）なので、

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Gm}{x^2}.$$

加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書き、m を約すと、

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{G}{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} + C$$

となる。ここで C は定数である。これは彗星がどちら向きに運動していても、運動の全期間を通じて成り立つ。（これは単位質量あたりのエネルギー保存則であり、運動エネルギー $\frac{1}{2}v^2$ と位置エネルギー $-G/x$ の和が一定であることを表す。）

x がいくらでも大きくなるための条件

与えられた時刻において $x = h$、$v = V$ であるから、$C = \frac{1}{2}V^2 - \dfrac{G}{h}$ であり、それ以後のすべての時刻で

$$v^2 = V^2 - \frac{2G}{h} + \frac{2G}{x}.$$

対偶（contrapositive）を証明する。すなわち、$V^2 < 2G/h$ ならば x は有界であることを示す。

考えてみよう 彗星はその後、原理的にはさまざまな動き方をしうる。たった一つの方程式で、どうしてすべての時刻にわたって x を押さえられるのだろうか。

彗星がどのように運動していようとも、各瞬間に $v^2 \geq 0$ が成り立つからである。$V^2 < 2G/h$ と仮定し、$k = \dfrac{2G}{h} - V^2 > 0$ とおく。するとエネルギー方程式より

$$\frac{2G}{x} = v^2 + k \geq k, \qquad \text{よって} \qquad x \leq \frac{2G}{k} = \frac{2Gh}{2G - hV^2}$$

がそれ以後のすべての時刻で成り立つ（$x > 0$ かつ $k > 0$ なので、両辺に掛けて分母を払ってよい）。したがって x は決して一定の値 $2Gh/(2G - hV^2)$ を超えない。彗星はこの距離まで上昇してそこで $v = 0$ となり、その後落下して戻ってくる。ゆえに、$V^2 \geq 2G/h$ でない限り x はいくらでも大きくなることはできない。これが示すべきことであった。

（逆（converse）も成り立つ。$V^2 \geq 2G/h$ ならば、彗星が外向きに運動している間は $v^2 \geq 2G/x > 0$ なので、彗星は決して止まらない。さらに $x \leq X$ である限り $v^2 \geq 2G/x \geq 2G/X$ なので、どんな距離 X よりも内側にいつまでもとどまり続けることはできない。これが脱出速度（escape speed）である。）

太陽に落下するまでの時間

次に、彗星は非常に遠い距離 D から静止した状態で出発する。静止状態から放たれると、彗星は太陽に向かって真っすぐ落下する。$x = D$ で $v = 0$ としてエネルギー方程式を用いると、

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} - \frac{G}{D}.$$

考えてみよう 「非常に遠い距離」とは、定数にとって何を意味するのだろうか。

それは $D \to \infty$ とすることを意味する。すると $G/D \to 0$ となり、定数は 0 になる。つまり彗星の全エネルギーは 0 である。（D が大きいが有限であれば、彗星はわずかに遅くなり、時間はわずかに長くなるが、その差は $D \to \infty$ のとき 0 に収束する。）よって距離 x における速さは $\sqrt{2G/x}$ であり、x は減少しているので、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2G}{x}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2G}\,\mathrm{d}t.$$

$x = h$ から $x = 0$ まで進むのにかかる時間を T とする。積分すると、

$$\sqrt{2G}\,T = \int_0^h \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}h^{3/2},$$

よって

$$T = \frac{2h^{3/2}}{3\sqrt{2G}} = \frac{h}{3}\sqrt{\frac{2h}{G}}.$$

（被積分関数 $\sqrt{x}$ は $x = 0$ においてまったく問題なく振る舞うので、速さが限りなく大きくなるにもかかわらず、彗星は実際に有限の時間で太陽に到達する。）

検算

- 単位：力 Gm/x^2 は質量と加速度の積なので、G の単位は $\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}$ である。すると V^2 と $2G/h$ はいずれも $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$ の単位をもち、$h^{3/2}/\sqrt{G}$ の単位は秒である。
- $x = h$ における彗星の速さは $\sqrt{2G/h}$ である。もしこの速さを保ったままなら、かかる時間は $h/\sqrt{2G/h} = \frac{h}{2}\sqrt{2h/G}$ となり、これは T より長い。彗星は加速するのだから、当然そうなるべきである。実際、T はこの値の 3 分の 2 である。
- 数値的に、$G = h = 1$ とする。$x = 1$、$v = \sqrt{1.5}$ から運動を少しずつ進めて計算すると、彗星は $x = 4.000$ で折り返し、$2Gh/(2G - hV^2) = 4$ という予測と一致する。$x = 1$、$v = -\sqrt{2}$ から出発すると、0.4714 後に太陽に到達し、$T = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0.47140$ と一致する。無限遠の代わりに $D = 10^6$ から静止状態で出発させても、T は小数第 7 位しか変わらない。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2G/x}$ のマイナス符号を忘れ、負の時間が出てしまう、あるいは理由を述べずに 0 から h まで積分してしまう。
- 彗星が減速することだけを示してしまう。遠ざかる彗星はすべて減速するのであり、脱出するものでさえそうである。要点は、$V^2 < 2G/h$ のとき、ある距離より先では v^2 が負になってしまうということである。

STEP のその先へ

量 $\frac{1}{2}v^2 - G/x$ はニュートン重力場における単位質量あたりのエネルギーであり、その符号によって束縛軌道（bound orbit、楕円）か脱出（放物線および双曲線）かが決まる。最後の小問で扱った全エネルギー 0 の落下は、放物線軌道の退化した直線の場合であり、$T \propto h^{3/2}$ はケプラー（Kepler）の第三法則（Kepler's third law）の親戚である。大学 1 年次の軌道に関する講義では、これらすべてを同じエネルギー方程式と角運動量（angular momentum）の方程式から展開する。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、中心力（central force）と軌道を徹底的に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。