解答例

STEP I 1992、第 12 問

力学 ・ 摩擦のある静力学

> **STEP I 1992、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q12

鍵となる考え方

2 本のはしごは軽い（light）ので、一方のはしごについて役に立つ方程式を得るには、蝶番（hinge）A のまわりのモーメント（moment）をとるしかない。そうすれば、もう一方のはしごから受ける未知の力と A にかかる荷重が消える。はしごの足は互いに離れるように滑ろうとし、この外向きの押す力には、摩擦（friction）と棒の両方が抵抗する。倒壊の瞬間には摩擦は出せる限りの力を出しているので、残りは棒が担わなければならない。

解答

モデル

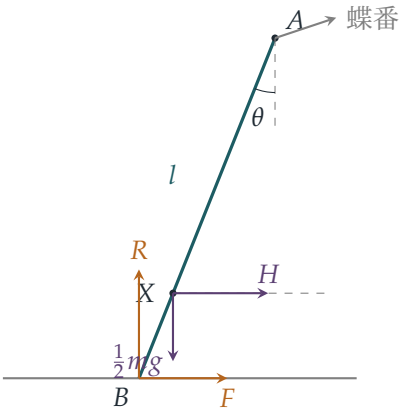
はしごは軽い棒で、A でなめらかな蝶番によってつながれている。木の棒 XY は質量 m の一様な（uniform）棒で、X と Y でピン接合（pin-jointed）されている。質量 M は A にある質点（particle）である。$t = \tan\theta$ とおく。装置全体の左右対称性により、2 つの足には等しい垂直抗力（normal reaction）R がはたらき、脚立（step-ladder）全体について鉛直方向の力を分解すると

$$2R = (M+m)g \quad \Longrightarrow \quad R = \tfrac{1}{2}(M+m)g.$$

はしごは外側に傾いているので、足は互いに離れるように滑ろうとする。したがって、各足にはたらく摩擦力 F は内向きである。

棒から受ける力。 棒は水平で、それ自体に重さがあるので、両端にはたらく力は棒に沿った方向では**ない**。対称性により、各端は棒の重さの半分を支えるので、はしごは

X で棒に上向きの力 $\frac{1}{2}mg$ と、外向きの水平な力 H（張力（tension））を及ぼす。ニュートンの第三法則（Newton's third law）により、棒ははしご AB を X で、内向きの水平な力 H と下向きの鉛直な力 $\frac{1}{2}mg$ で引く。



はしご AB についての A のまわりのモーメント

A から測ると、足 B は水平方向に $l\sin\theta$、下方向に $l\cos\theta$ の位置にあり、X は水平方向に $\frac{3}{4}l\sin\theta$、下方向に $\frac{3}{4}l\cos\theta$ の位置にある。A のまわりのモーメントをとる（A にはたらく力はすべてモーメントをもたない）：

- R ははしごを一方の向きに回し、そのモーメントは $Rl\sin\theta$ である。
- F と H（どちらも内向きで、A より下ではたらく）ははしごを逆の向きに回し、そのモーメントは $Fl\cos\theta$ と $H\cdot\frac{3}{4}l\cos\theta$ である。
- X での下向きの力 $\frac{1}{2}mg$ は R と同じ側にはたらくが向きは逆であり、R に逆らうモーメント $\frac{1}{2}mg\cdot\frac{3}{4}l\sin\theta$ をもつ。

よって

$$Fl\cos\theta+\tfrac{3}{4}Hl\cos\theta=Rl\sin\theta-\tfrac{3}{8}mgl\sin\theta,$$

であり、$l\cos\theta$ で割って R を代入すると

$$F+\tfrac{3}{4}H=t\left(\tfrac{1}{2}(M+m)g-\tfrac{3}{8}mg\right)=t\left(\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{8}m\right)g. \qquad (*)$$

考えてみよう 摩擦と棒はどちらも足を内側に押さえている。F としてどの値を用いればよいだろうか？

式 $(*)$ は、摩擦と張力が一定量の仕事を分担していることを示している。摩擦が多く担えば担うほど、棒が担う分は少なくてすむ。したがって、許される範囲の摩擦

（$F \leq \mu R$）のうちどれかで $H \leq T$ となる限り、脚立は持ちこたえる。そして、最小の張力は最大の摩擦 $F = \mu R$ のときに得られる。これが、問題文で仮定してよいとされている、倒壊時の限界状態である。$F = \mu R = \frac{1}{2}\mu(M+m)g$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{4}H &= t\left(\tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{8}m\right)g - \tfrac{1}{2}\mu(M+m)g \\ &= \tfrac{1}{2}(t-\mu)Mg + \tfrac{1}{8}(t-4\mu)mg,\end{aligned}$$

よって

$$H = \tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg + \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg.$$

$t > \mu$ であるから、H は M とともに増加する。棒がなければ、摩擦だけでは荷重さえ支えられない（$m = 0$ のとき、$t \leq \mu$ が必要になる）。

安全に置ける最大の質量

棒が持ちこたえるのは $H \leq T$、すなわち

$$\tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg \leq T - \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg,$$

のときであり、正の量 $\frac{2}{3}(t-\mu)g$ で割ると

$$\boxed{M \leq \frac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}}$$

したがって、A に安全に置ける最大の質量は $\dfrac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}$ である。

自重による破壊

A に何も置かない場合（$M = 0$）、必要な張力は $H = \frac{1}{6}(t-4\mu)mg$ であるから、棒が破断するのは

$$\tfrac{1}{6}(\tan\theta - 4\mu)mg > T \iff \tan\theta > \frac{6T}{mg} + 4\mu,$$

のときであり、これが示すべきことであった。この場合、上で求めた M の上限は負になる。脚立は自分自身さえ支えられないので、どんな荷重も安全ではない。

検算

- T が非常に大きければ安全な質量も非常に大きい。また、$\tan\theta$ が μ をわずかに上回るだけなら分母は非常に小さく、やはりほとんどどんな荷重も安全である。摩擦だけでほぼ足りるからである。

- 静力学の完全な問題（両方のはしご、棒、A のピンを含み、12 個の未知の力成分と両足での限界摩擦をもつ）を、2000 通りのランダムな配置について数値的に解いたところ、張力の公式が約 10^{-12} の精度で再現された。たとえば、$\theta = 45°$、$\mu = 0.2$、$m = 2\,\mathrm{kg}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ のとき、$M = 0$ での棒の張力は $\frac{1}{6}(0.2)(19.6) \approx 0.653\,\mathrm{N}$ である。

よくある間違い

- 棒を軽い連結棒として扱い、X での力が純粋に XY に沿った方向だとしてしまう。棒には重さがあるので、各端は鉛直方向に $\frac{1}{2}mg$ も支えている。$\frac{1}{8}m$ と 4μ はここから生じる。
- 足での摩擦を外向きにしてしまう。$\tan\theta > \mu$ であるから足は開こうとするので、摩擦は内向きにはたらき、棒を助ける。

STEP のその先へ

このような骨組みのように、つり合い（equilibrium）の方程式だけではすべての力が定まらない（ここでは摩擦と張力が互いに融通し合える）ものを、**静的不定**（statically indeterminate）であるという。技術者はこのような場合を、追加の情報によって解決する。ここでのような限界条件や、部材の弾性などである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、力、トルク（torque）、つり合いについての理解を深めるのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。