解答例

STEP I 1992、第 11 問

力学 ・ 弾性ひものつり合い

> **STEP I 1992、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q11

鍵となる考え方

各質点は釣り合い（equilibrium）の状態にあるので、そのすぐ上の糸の張力（tension）は、すぐ下の糸の張力より mg だけ大きい。これによって 3 つの張力が結びつき、フックの法則（Hooke's law）によって張力は伸び（extension）に置き換えられる。必要な追加の事実は幾何的なものただ一つである。すなわち、伸びた 3 本の糸の長さの和は部屋の高さに等しくなければならない。高さが求まれば、「$CD = a$」とは単に、いちばん下の糸に張力がはたらいていないということを意味する。

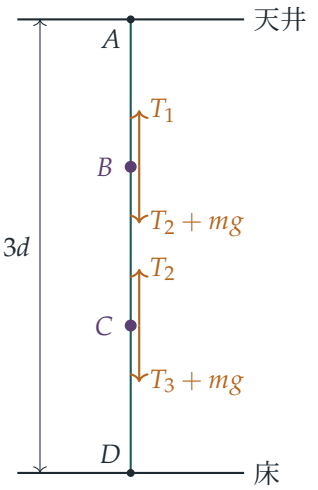
解答

モデル

糸は軽く弾性をもち、伸びているときはフックの法則（張力 $= \lambda \times$ 伸び $/ a$）に従う。質点は静止している。AB、BC、CD の張力をそれぞれ T_1、T_2、T_3、伸びを x_1、x_2、x_3 と書くと、$T_i = \lambda x_i / a$ である。重さ mg だけによって生じる伸びに名前をつけておくと便利である：

$$e = \frac{mga}{\lambda}.$$

まず 3 本の糸がすべてぴんと張っている（taut）と仮定し、これが成り立つのはどのような場合かを後で確かめる。床からの高さを y_B、y_C とする。



B と C の高さ

各質点について鉛直方向の力の釣り合いを考える（上の糸は上向きに引き、下の糸と重力は下向きに引く）：

$$B: \quad T_1 = T_2 + mg, \qquad C: \quad T_2 = T_3 + mg.$$

λ/a で割ると、これらは伸びについての式になる：

$$x_1 = x_2 + e, \qquad x_2 = x_3 + e, \qquad \text{よって} \qquad x_2 = x_3 + e, \quad x_1 = x_3 + 2e.$$

3 本の糸の長さの和は部屋の高さに等しい：

$$3a + x_1 + x_2 + x_3 = 3d \quad \Longrightarrow \quad 3x_3 + 3e = 3d - 3a \quad \Longrightarrow \quad x_3 = d - a - e.$$

すると $x_2 = d - a$、$x_1 = d - a + e$ である。高さは下側の糸の長さから求まる：

$$y_C = CD = a + x_3 = d - e = d - \frac{mga}{\lambda},$$
$$y_B = y_C + BC = (d - e) + (a + d - a) = 2d - \frac{mga}{\lambda}.$$

AB について確認すると、$3d - y_B = d + e = a + x_1$ となり、確かにそうなるべき値になっている。

考えてみよう これらの答えが実際に正しいのはどのような場合か？

すべての糸がぴんと張っていると仮定したので、すべての伸びが非負でなければならない。最も厳しい条件はいちばん下の糸に関するもので、$x_3 \geq 0$、すなわち

$$\frac{mga}{\lambda} \leq d - a.$$

である（このとき $x_2 = d - a \geq 0$ と $x_1 > 0$ は自動的に成り立つ）。最初にたるむ（slack）のが CD であるのは理にかなっている。CD は何も支えておらず、部屋の高さによって引き伸ばされていることだけがこの糸を張らせているからである。$mga/\lambda > d - a$ ならば糸 CD はたるみ、系は単に A から 2 つの質点がぶら下がっているだけになる。このとき $T_2 = mg$、$T_1 = 2mg$ なので $AB = a + 2e$、$BC = a + e$ となり、これがまだ床より上にあれば $y_B = 3d - a - 2e$、$y_C = 3d - 2a - 3e$ である。問題が意図しているのは、すべての糸が張っている主要な場合である。

$CD = a$ となるのはいつか？

糸 CD がちょうど自然長（natural length）になるのは、張力がなくちょうど張った状態、すなわち $T_3 = 0$、つまり $x_3 = 0$ のときである。これは上の 2 つの場合の境界であり、どちらの公式からも

$$y_C = a \iff d - \frac{mga}{\lambda} = a \iff m = \frac{\lambda(d-a)}{ga}.$$

が得られる。物理的には、このとき C にある質点は完全に BC によって支えられており、$T_2 = mg$、$T_1 = 2mg$ である。

適切な質量が存在するのは、この m の値が正であるとき、すなわち $d > a$ のときに限る。逆に、$d \leq a$ ならばどんな正の m もうまくいかない。もしすべての糸が張っているとすると $x_2 = d - a \geq 0$ かつ $x_3 = d - a - e < 0$ が必要になるが、これは不可能である。したがって CD はたるみ、C は高さ $3d - 2a - 3e < 3a - 2a = a$ にぶら下がる（あるいは床の上に乗る）ので、$CD < a$ となる。よって求める値の集合は

$$\{\, d : d > a \,\}.$$

である。このような d に対して $y_C = a$、$y_B = d + a$、$AB = 2d - a$ が得られる。

検算

- 単位：mga/λ は力 × 長さ ÷ 力なので長さであり、d から引くものとして当然そうでなければならない。
- $m = 0$ のとき、3 本の糸は伸びを等しく分け合う。それぞれの長さは d となり、C は d、B は $2d$ の位置にくる。質量を加えると、BC の伸びは $d - a$ のままなので、両方の質点が同じ量 e だけ下がる。
- 数値的に、a、λ、d、m を無作為に 250 通り選び、$0 \leq y_C \leq y_B \leq 3d$ の範囲で位置エネルギー（potential energy）（重力によるものと弾性によるものの和、糸がたるむことも許す）を最小化したところ、張った場合と CD がたるんだ場合の両方で、高さが

10^{-14} 以内の誤差で再現された。$a = 1$、$\lambda = 10$、$d = 2$、$m = \lambda(d-a)/(ga) \approx 1.020$ とすると $CD = 1.000000$、$y_B = 3.000000$ が得られた。また $d \le a$ のときには、どの正の m でも $CD = a$ とはならなかった。

よくある間違い

- 張力を $\lambda\times$ 伸び $/a$ ではなく $\lambda\times$（伸びた長さ）$/a$ と書いてしまう。
- 全長が部屋によって固定されていることを忘れる：$\sum(a + x_i) = 3d$ がなければ、釣り合いの式だけでは伸びは決まらない。
- すべての糸に張力がはたらいていなければならないと思い込む。糸はたるむことがあり、$CD = a$ となるのはまさにたるみの境界においてである。

STEP のその先へ

これは小さな不静定構造（statically indeterminate structure）である。質点の釣り合いだけでは張力は決まらず、適合条件（compatibility condition）（長さの和が合うこと）も必要であった。同じ考え方を行列の形で用いるのが、技術者がばねや棒からなる骨組みを解析する方法である。もう一つの取り組み方は全位置エネルギーを最小化することであり、数値的な検算はこの方法で行った。この変分的（variational）な見方は、より進んだ力学において中心的な役割を果たす。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、ばね、釣り合い、位置エネルギーを丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。