解答例

STEP I 1992、第 10 問

力学 ・ 反動と運動量

> **STEP I 1992、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q10

鍵となる考え方

力 P は弾丸（projectile）を前方へ押すが、ニュートン（Newton）の第 3 法則（Newton's third law）により、弾丸も同じ大きさ P の力で大砲を後方へ押し返す。そして大砲の反動（recoil）を止める水平方向の力は何もない。したがって、弾丸が砲身の中にある間に進む距離は、地面に対して l なのでは**ない**。l だけ進むのは**大砲に対して**である。どちらの物体も加速度は一定なので、相対運動（relative motion）で考えるのが最も見通しのよい方法である。

解答

モデル化

弾丸と大砲を同一の水平直線上を運動する質点とみなし、床はなめらかであるとし（大砲は「自由に滑る」）、砲身に沿って弾丸と砲身の間にはたらく力は一定値 P であるとする。鉛直方向については、重力は垂直抗力（床が大砲に及ぼす力、砲身が弾丸に及ぼす力）とつり合っているので、水平方向の運動には関与しない。発射の向きを正の向きとする。



2 つの加速度

弾丸が砲身の中にある間、弾丸にはたらく水平方向の力は前向きの P のみであり、大砲にはたらく水平方向の力は後ろ向きの反作用 P のみである（ニュートンの第 3 法則による。床はなめらかである）。ニュートンの第 2 法則（Newton's second law）より、加速度は

$$a_{\text{弾丸}} = \frac{P}{m}, \qquad a_{\text{大砲}} = -\frac{P}{M}.$$

である。どちらも一定であり、どちらの物体も静止状態から動き始める。

> **考えてみよう** 弾丸はどれだけの距離にわたって加速されるのか。l だろうか、それとも別の値だろうか。

砲身の長さは l であるが、砲身そのものが後方へ動く。弾丸が砲口から出るのは、**大砲に対する**変位が l に達したときである。大砲に対して、弾丸は静止状態から一定の加速度

$$a_{\text{相対}} = \frac{P}{m} - \left(-\frac{P}{M}\right) = \frac{P}{m} + \frac{P}{M} = \frac{P(M+m)}{mM}.$$

で運動を始める。

砲身内にある時間

相対運動に $s = \frac{1}{2}at^2$ を用いると、弾丸が砲口から出る時刻 T は

$$l = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(M+m)}{mM} T^2, \qquad \text{よって} \qquad T^2 = \frac{2mMl}{P(M+m)}.$$

を満たす。

発射速度

地面に対して、弾丸は静止状態から一定の加速度 P/m で運動するので、時刻 T における速さ v は

$$\begin{aligned} v^2 = \left(\frac{P}{m}T\right)^2 &= \frac{P^2}{m^2} \cdot \frac{2mMl}{P(M+m)} \\ &= \frac{2PMl}{m(M+m)}. \end{aligned}$$

を満たす。$v > 0$ であるから

$$v = \sqrt{\frac{2PMl}{m(M+m)}},$$

となり、これが求める結果である。

別解：エネルギーと運動量

同じ答えは保存則からも得られる。水平方向の外力ははたらかないので、水平方向の運動量は保存される（conservation of momentum）。弾丸が砲口から出る瞬間に大砲が後ろ向きに速さ V をもつとすると、$mv = MV$ である。弾丸が砲身の中にある間に、弾丸が前方へ x、大砲が後方へ X だけ動くとすると、$x + X = l$ である。弾丸にはたらく力がする仕事は Px であり、大砲にはたらく反作用は大砲の運動の向きと同じ向きなので、その仕事は PX である。合わせて $P(x + X) = Pl$ の仕事がなされる。よって

$$Pl = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}M\left(\frac{mv}{M}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2\,\frac{M+m}{M},$$

であり、ここからもやはり $v^2 = \dfrac{2PMl}{m(M+m)}$ が得られる。

検算

- 重い大砲：$M \to \infty$ のとき因子 $M/(M+m) \to 1$ となり、$v \to \sqrt{2Pl/m}$ となる。これは固定された大砲から撃ったときの速さ（仕事 Pl がすべて弾丸に与えられる場合）である。反動する大砲では、エネルギーの一部が反動に使われるので、速さは常にわずかに小さくなる。これは当然そうあるべき結果である。
- 単位：Pl はエネルギーであり、Pl/m の単位は $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$ であるから、v は速さである。
- 数値：$m = 0.1$、$M = 0.9$、$P = 9$、$l = 0.5$（SI 単位）とすると、公式から $v = 9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ が得られ、大砲は $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で反動する。このとき運動量は $0.1 \times 9 = 0.9 \times 1$、運動エネルギーは $4.05 + 0.45 = 4.5 = Pl$ である。両物体の運動を逐次的に数値シミュレーションし、両者の距離が l に達した時点で止めると、m、M、P、l の多くの無作為な値に対して公式と一致する。

よくある間違い

- $v^2 = 2(P/m)l$ を用いること。これは l を地面に対する弾丸の移動距離とみなし、反動を無視している。
- ニュートンの第 3 法則を忘れ、大砲を静止したままにしてしまうこと。大砲は自由に滑るので、必ず反動する。
- エネルギーを用いる方法で、仕事を P と弾丸の地面に対する変位の積だけとしてしまうこと。大砲にはたらく反作用も仕事をする。

STEP のその先へ

これは二体問題（two-body problem）であり、相対加速度 $P(M+m)/(mM)$ は P を**換算質量**（reduced mass）$\mu = mM/(m+M)$ で割ったものである。互いの間でのみ相互作用する 2 つの物体は、相対的には質量 μ の 1 つの物体のようにふるまう。同じ考え方で惑星の軌道、連星、衝突する粒子を扱うことができ、ロケットや反動の問題の基礎にもなっている。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、換算質量とここで用いた運動量の考え方の両方が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。