解答例

STEP I 1992、第 1 問

純粋数学 • 7 を法とする暦の計算

> **STEP I 1992、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q1

鍵となる考え方

曜日は 7 日ごとに繰り返すので、必要なのは二つの日付の間の日数を 7 を法として（modulo）簡約したものだけである。これを楽にする工夫は $365 = 52 \times 7 + 1$ という事実である。すなわち、平年は曜日を一つずらし、うるう年（leap year）は二つずらす。そこで、まず丸ごとの年とうるう日を数え、最後に端数の月を処理する。「注意深く」とは、どの 2 月 29 日が実際に区間内に入るか、そして私たちをつまずかせるかもしれない唯一の世紀年について正確であることを意味する。

解答

1905 年 4 月 3 日から 1992 年 6 月 26 日までの区間を二つに分ける。

$$1905\text{ 年 }4\text{ 月 }3\text{ 日} \longrightarrow 1992\text{ 年 }4\text{ 月 }3\text{ 日} \longrightarrow 1992\text{ 年 }6\text{ 月 }26\text{ 日}.$$

丸ごとの年：1905 年 4 月 3 日から 1992 年 4 月 3 日まで

これは $1992 - 1905 = 87$ 年分の丸ごとの年である。そのような各年（4 月 3 日から翌年の 4 月 3 日まで）は 365 日を含み、その中に 2 月 29 日が入っていればさらに 1 日加わる。

1905 年 4 月 3 日から 1992 年 4 月 3 日までの間にある 2 月 29 日はどれか。この範囲のうるう年は 4 で割り切れる年、すなわち

$$1908,\ 1912,\ \ldots,\ 1988,\ 1992.$$

である。1904 年の 2 月 29 日は 1905 年 4 月 3 日より前なので数えない。1992 年の 2 月

29 日は 1992 年 4 月 3 日より前にあるので数える。したがって、うるう日の個数は

$$\frac{1992-1908}{4}+1=21+1=22$$

である。

> **考えてみよう** この範囲で 4 で割り切れる年は、本当にすべてうるう年だろうか。

グレゴリオ暦では、世紀年は 400 で割り切れる場合に限りうるう年となるので、1900 年はうるう年では**なかった**（そして 2000 年はうるう年であった）。しかし、どちらも今回の区間には入っていないので、単純な「4 で割り切れる」という規則（覚え歌にある規則）がここではそのまま正しい。もし問題が 1900 年より前までさかのぼっていたら、1900 年 2 月 29 日を除かなければならなかったであろう。

よって、1905 年 4 月 3 日から 1992 年 4 月 3 日までの日数は

$$87\times 365+22=31\,755+22=31\,777.$$

である。7 を法として計算するほうが速い。$365\equiv 1 \pmod 7$ であるから、これは

$$87+22=109=15\times 7+4\equiv 4 \pmod 7.$$

となる。

端数の月：1992 年 4 月 3 日から 1992 年 6 月 26 日まで

覚え歌によれば、4 月は 30 日、5 月は 31 日であるから、

$$\begin{aligned}4\text{月}3\text{日}&\to 5\text{月}3\text{日}:30\text{日},\\ 5\text{月}3\text{日}&\to 6\text{月}3\text{日}:31\text{日},\\ 6\text{月}3\text{日}&\to 6\text{月}26\text{日}:23\text{日},\end{aligned}$$

となり、合計 $30+31+23=84=12\times 7$ 日で、これは $\equiv 0 \pmod 7$ である。うれしいことに、1992 年 4 月 3 日と 1992 年 6 月 26 日は同じ曜日である。

まとめる

全体の間隔は

$$31\,777+84=31\,861=4551\times 7+4\text{ 日},$$

であるから、1905 年 4 月 3 日は 1992 年 6 月 26 日より曜日にして 4 日**前**である。金曜日から 4 日さかのぼると、木曜日、水曜日、火曜日、月曜日となる。よって

1905 年 4 月 3 日は月曜日であった。

検算

- コンピュータで二つの日付の間の日数を月ごとに直接数えると 31 861 日となり、これは 4 (mod 7) である。また、コンピュータのカレンダーでも 1905 年 4 月 3 日は月曜日（そして 1992 年 6 月 26 日は金曜日）となる。
- 向きの確認：月曜日から**後ろへ** 4 日進むと、当然金曜日になる。
- うるう日の個数を別の方法で確認する：87 年にはおよそ $87/4 \approx 21.75$ 個のうるう日が含まれるので、22 はほぼ妥当である。

よくある間違い

- 1904 年 2 月 29 日（開始日より前）を含めてしまう、あるいは 1992 年 2 月 29 日（終了日より前）を除いてしまう。どちらも答えが 1 日ずれる。
- 前へ数えるべきところを後ろへ数える、またはその逆。余り 4 は、週の周期の中で 1905 年の日付が金曜日の 4 日**前**であることを意味し、後ではない。
- この方法をより前の日付に拡張するときに、1900 年をうるう年として扱ってしまう。

STEP のその先へ

これは 7 を法とする算術である。鍵となる事実 $365 \equiv 1 \pmod 7$ により、大きな数え上げが小さなものに変わる。合同式（congruence）と、任意の日付の曜日を求めるツェラーの公式（Zeller's congruence）のような暦の問題へのその応用は、整数論（number theory）の最初の講義の標準的な内容である。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等算術）は、合同式をはじめ多くの話題へのすばらしい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。