解答例

STEP III 1991、第 9 問

純粋数学 ・ 楕円の弧長

> **STEP III 1991、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q9

鍵となる考え方

E_1 は中心を基準とした形で表した楕円（ellipse）であり、E_2 は同じ曲線を、焦点（focus）を極とする極形式（polar form）で表したものである。E_2 を直交座標の式に直して平方完成（completing the square）すれば、中心と軸の位置がわかり、半軸（semi-axis）の長さを比べることで k と b が求まる。積分については、周長（perimeter）はただ一つの数であるが、媒介変数表示（parametrisation）ごとに見かけの異なる弧長（arc length）の積分が得られる。

解答

軸、k と b

E_2 の座標を (x, y) と書き、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$、$\theta = \theta_2$ とおく。すると E_2 は $r = \dfrac{k}{1 + e\cos\theta}$、すなわち $r + er\cos\theta = k$ を表すから、

$$r = k - ex.$$

両辺を 2 乗すると（曲線上では $r = k/(1 + e\cos\theta) > 0$ なので、これによって情報は失われない）、

$$x^2 + y^2 = k^2 - 2kex + e^2x^2 \quad \Longrightarrow \quad (1 - e^2)x^2 + 2kex + y^2 = k^2.$$

x について平方完成すると

$$(1 - e^2)\left(x + \frac{ke}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = k^2 + \frac{k^2e^2}{1 - e^2} = \frac{k^2}{1 - e^2},$$

よって

$$\frac{(x+\frac{ke}{1-e^2})^2}{k^2/(1-e^2)^2}+\frac{y^2}{k^2/(1-e^2)}=1.$$

これは、E_2 の座標軸において中心が $(-\frac{ke}{1-e^2},0)$ で、対称軸が E_2 の座標軸に平行であり、半軸の長さが

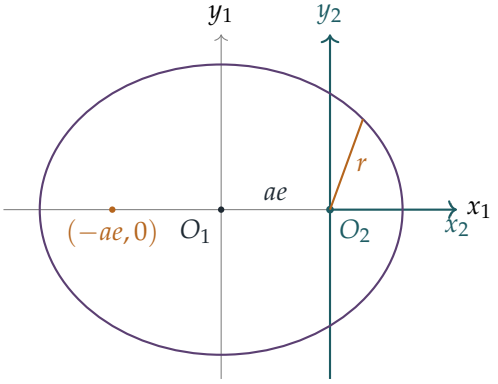
$$A=\frac{k}{1-e^2}\,(x\text{ 方向}),\qquad B=\frac{k}{\sqrt{1-e^2}}\,(y\text{ 方向}).$$

である楕円である。$0<1-e^2<1$ であるから $A>B$ となり、長軸（major axis）は E_2 の x 軸に沿っている。E_1 については $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ かつ $a>b$ であるから、長軸は E_1 の x 軸に沿っている。二つの曲線は同じものであるから、長半軸どうしが一致し、短半軸どうしも一致する：

$$a=\frac{k}{1-e^2},\quad\text{すなわち}\quad k=a(1-e^2),\qquad b^2=\frac{k^2}{1-e^2}=\frac{a^2(1-e^2)^2}{1-e^2}=a^2(1-e^2),$$

これが求める二つの結果である。

中心、すなわち E_1 の原点は、E_2 の x 軸上の $x=-\frac{ke}{1-e^2}=-ae$ にある。したがって E_2 の座標軸は、E_1 の座標軸を長軸に沿って距離 ae だけ平行移動したものである。E_2 の原点は E_1 における点 $(ae,0)$ であり、$a^2-b^2=a^2e^2$ であるからこれは焦点である。二つの x 軸は同じ直線（長軸）上にあり、y 軸どうしは平行である。E_1 の座標で書けば $x_1=x_2+ae$、$y_1=y_2$ である。楕円は両方の軸に関して対称であるから、E_2 の原点をもう一方の焦点 $(-ae,0)$ にとり、x 軸の向きを逆にしてもよい。いずれにしても、$\theta_2=0$ に対応する点は焦点に最も近い頂点である。



二つの積分

楕円の上半分（$y\geq 0$）の長さを二通りの方法で計算する。

E_1 を用いる。θ_1 が 0 から π まで動くとき、点は上半分をちょうど 1 回通る。$\dot{x}=-a\sin\theta_1$、

$\dot{y} = b\cos\theta_1$ であるから、$a^2 - b^2 = a^2e^2$ を用いて

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\sin^2\theta_1 + b^2\cos^2\theta_1 = a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta_1 = a^2\left(1 - e^2\cos^2\theta_1\right),$$

となる。よって周長の半分は

$$\tfrac{1}{2}P = a\int_0^{\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

E_2 を用いる。 ここでは $r > 0$ であるから、$y_2 = r\sin\theta_2 \geq 0$ となるのはちょうど $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ のときである。したがって $\theta_2 \in [0, \pi]$ もまた上半分をちょうど 1 回描く。極座標（polar coordinates）では $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$ である。$r = k(1 + e\cos\theta)^{-1}$ より

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{ke\sin\theta}{(1 + e\cos\theta)^2},$$

であるから

$$r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{k^2\left[(1 + e\cos\theta)^2 + e^2\sin^2\theta\right]}{(1 + e\cos\theta)^4} = \frac{k^2\left(1 + e^2 + 2e\cos\theta\right)}{(1 + e\cos\theta)^4}.$$

したがって $k = a(1 - e^2)$ を用いて

$$\tfrac{1}{2}P = a(1 - e^2)\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos\theta}}{(1 + e\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

$\frac{1}{2}P$ の二つの表示を等しいとおき、$a > 0$ で割れば、求める等式が得られる。

> **考えてみよう** なぜ両方の媒介変数がともに $[0, \pi]$ を動かなければならず、一方だけ別の範囲を動くのではいけないのだろうか。

弧長は曲線の同じ部分についてのものでなければならない。θ_1 と θ_2 は異なる角である（一方は中心から測った離心角（eccentric angle）、他方は焦点から測った偏角（polar angle）である）が、どちらも $[0, \pi]$ 上で、右側の頂点 $(a, 0)$ から左側の頂点 $(-a, 0)$ まで上半分を描く。したがって二つの積分は同じ弧を測っている。

近似

$0 \leq e^2\cos^2\theta < 1$ であるから、二項級数（binomial series）が使える：

$$\sqrt{1 - u} = 1 - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + O(u^3), \qquad u = e^2\cos^2\theta.$$

$O(u^3)$ の項は $O(e^6)$ であり、これは無視する。

$$\int_0^{\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{8}$$

（2 番目は $\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$ から得られる）を用いると

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \approx \pi - \frac{e^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{e^4}{8}\cdot\frac{3\pi}{8} = \pi\Big(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64}\Big)$$
$$= \tfrac{1}{64}\pi\big(64 - 16e^2 - 3e^4\big).$$

いま証明した等式により、2 番目の積分も同じ値をとる。これで問題は完結する。

検算

- $e = 0$ のとき二つの積分はともに π に等しく、E_2 は $k = a$ として円 $r = k$ になる。正しい。
- $a = 2$、$b = 1$（したがって $e^2 = \frac{3}{4}$）のとき、200 000 角形で近似すると周長は 9.6884482 となり、$2a$ に 1 番目の積分を掛けたものと一致する。
- 数値的には、$e = 0.2$ のとき二つの積分はともに 3.1099371 であり、近似式は 3.1099411 を与える。その差はおよそ $-0.063e^6$ であり、級数の次の項 $-\frac{5\pi}{256}e^6 \approx -0.061e^6$ と整合する。

よくある間違い

- E_2 の原点を中心にとってしまうこと。分母に $1 + e\cos\theta$ をもつ極形式では、極は常に焦点にある。
- 極座標の弧長で $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2$ の項を忘れること、あるいは一方を $[0, 2\pi]$、他方を $[0, \pi]$ で積分してしまうこと。

STEP のその先へ

積分 $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ は第 2 種完全楕円積分（complete elliptic integral of the second kind）$E(e)$ であり、楕円の周長は $4aE(e)$ となる。これは初等関数（elementary functions）では表せない。だからこそ、ここで扱ったような級数（そしてラマヌジャン（Ramanujan）による驚くほど精度の高い近似式）が重要になるのである。楕円積分は楕円関数（elliptic functions）や楕円曲線（elliptic curves）へとつながっており、楕円曲線は現代の整数論（number theory）の中心的な話題である。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展的問題集）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。