解答例

STEP III 1991、第 8 問

純粋数学 ・ 積分の漸化式と和

> **STEP III 1991、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q8

鍵となる考え方

小問 (i) は漸化式（reduction formula）なので、まず部分積分（integration by parts）を行うのが自然である。残った被積分関数には $\sin x \sin kx$ が含まれており、$\cos(k-1)x$ に対する加法定理（compound-angle formula）を使うと、これを同じ族の積分に戻すことができる。小問 (ii) は $(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^m$ の二項展開（binomial expansion）の実部である。小問 (iii) は (ii) を積分し、(i) の漸化式を望遠鏡和（telescoping）によってほどくことで得られる。

解答

小問 (i)

$k \geq 1$ とし、$u = \cos^k x$、$\mathrm{d}v = \cos kx \, \mathrm{d}x$ として部分積分を行う。このとき $v = \frac{1}{k}\sin kx$、$\mathrm{d}u = -k\cos^{k-1} x \sin x \, \mathrm{d}x$ であるから、

$$\begin{aligned} I_k &= \left[\tfrac{1}{k}\cos^k x \sin kx\right]_0^\theta + \int_0^\theta \cos^{k-1} x \, \sin x \, \sin kx \, \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{k}\cos^k \theta \sin k\theta + \int_0^\theta \cos^{k-1} x \, \sin x \, \sin kx \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

となる。ここで、括弧の中は $x = 0$ で 0 になることを用いた。

> ? **考えてみよう** $\sin x \sin kx$ を x の倍数の余弦を用いてどのように書き直せるだろうか。

$(k-1)x = kx - x$ と書くと、加法定理より

$$\cos(k-1)x = \cos kx \cos x + \sin kx \sin x,$$

であるから、

$$\sin x \sin kx = \cos(k-1)x - \cos x \cos kx.$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^\theta \cos^{k-1} x \, \sin x \, \sin kx \, \mathrm{d}x &= \int_0^\theta \cos^{k-1} x \cos(k-1)x \, \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_0^\theta \cos^k x \cos kx \, \mathrm{d}x \\ &= I_{k-1} - I_k.\end{aligned}$$

これをもとの式に代入して k を掛けると、

$$kI_k = \cos^k \theta \sin k\theta + kI_{k-1} - kI_k,$$

すなわち

$$2kI_k = kI_{k-1} + \cos^k \theta \sin k\theta,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

$z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$ とおく。二項定理（binomial theorem）より

$$\begin{aligned}(1+z)^m &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} z^r \\ &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} (\cos 2r\theta + \mathrm{i} \sin 2r\theta).\end{aligned}$$

次に「半角」をくくり出す。

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 2\cos\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

よって

$$(1+z)^m = 2^m \cos^m \theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} = 2^m \cos^m \theta \, (\cos m\theta + \mathrm{i} \sin m\theta).$$

$2^m \cos^m \theta$ は実数であるから、二つの表示の実部を比較すると

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \cos 2r\theta = 2^m \cos^m \theta \cos m\theta,$$

が得られ、これが示すべき恒等式である（$r = 0$ と $r = m$ の項はそれぞれ 1 と $\cos 2m\theta$ である）。

小問 (iii)

一つ目の式を S とおく。(ii) の右辺は I_m の被積分関数の 2^m 倍であるから、(ii) を 0 から θ まで積分する。$r=0$ の項の積分は θ であり、$r \geq 1$ に対しては $\int_0^\theta \cos 2rx \,\mathrm{d}x = \frac{\sin 2r\theta}{2r}$ である。よって

$$\theta + \sum_{r=1}^{m} \binom{m}{r} \frac{\sin 2r\theta}{2r} = 2^m I_m, \qquad \text{よって} \qquad S = 2^m I_m - \theta.$$

次に (i) を用いて $2^m I_m$ を求める。漸化式を $2k$ で割って 2^k を掛けると、$k \geq 1$ に対して

$$2^k I_k = 2^{k-1} I_{k-1} + \frac{2^{k-1}}{k} \cos^k \theta \sin k\theta.$$

考えてみよう なぜ 2^k を掛けるのだろうか。

$I_k = \frac{1}{2} I_{k-1} + \ldots$ と書くと、この漸化式には各段階で $\frac{1}{2}$ という係数がつく。$J_k = 2^k I_k$ とおくとこれが消え、$J_k - J_{k-1}$ が単純な陽な項になるので、和が望遠鏡和となる。$k = 1, 2, \ldots, m$ に対する式をすべて足し合わせると、途中の項が打ち消し合って

$$2^m I_m = 2^0 I_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{k-1}}{k} \cos^k \theta \sin k\theta.$$

最後に $I_0 = \int_0^\theta 1 \,\mathrm{d}x = \theta$ であるから、

$$\begin{aligned} S = 2^m I_m - \theta &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} 2^{k-1} \cos^k \theta \sin k\theta \\ &= \cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta + \cdots + \frac{1}{m} 2^{m-1} \cos^m \theta \sin m\theta, \end{aligned}$$

となり、示すべき結果が得られた。

検算

- $m = 1$：主張は $\frac{1}{2} \sin 2\theta = \cos\theta \sin\theta$ となり、これは 2 倍角の公式である。
- $m = 2$：左辺は $\sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta$、右辺は $\cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \cos 2\theta)$ であり、$\sin 2\theta \cos 2\theta = \frac{1}{2} \sin 4\theta$ より両者は等しい。
- 数値的には、$m = 5$、$\theta = 0.7$ のとき両方の式はともに 1.51963（小数第 5 位まで）となる。また、漸化式は、ランダムに選んだ k と θ に対してシンプソンの公式（Simpson's rule）で求めた I_k の値とも一致する。

よくある間違い

- 部分積分での符号の誤り。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^k x = -k\cos^{k-1} x \sin x$ であり、このマイナス符号が $\int v\,\mathrm{d}u$ の前のマイナスと打ち消し合う。
- (ii) の $r = 0$ の項を忘れること。この項の積分は θ となり、望遠鏡和の最下段にある $I_0 = \theta$ と打ち消し合う。

STEP のその先へ

$\cos^m\theta\cos m\theta$ を $\cos 2r\theta$ の一次結合として表すことは、フーリエ級数（Fourier series）を計算することにほかならない。ここではそれが有限の級数であり、項別に積分するのは、大学 1 年次の数理手法の講義でフーリエ級数を扱うやり方そのものである。また、(i) のような漸化式は、$\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ の形の積分やウォリスの積（Wallis product）を扱う際の標準的な道具でもある。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）では、(ii) で用いた $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = 2\cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ という技巧が幾何学的に説明されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。