解答例

STEP III 1991、第 7 問

純粋数学 • 対称性を利用した積分

> **STEP III 1991、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q7

鍵となる考え方

$\ln(\sin x)$ の積分は原始関数（antiderivative）から求めることはできないが、対称性がすべてを片付けてくれる。置換（substitution）$x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ は sin と cos を入れ替え、$x \mapsto \pi - x$ は $[0, \pi]$ 上の $\sin x$ が $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上の値の 2 つ分であることを示す。さらに $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ と書き直せば、未知の積分が満たすべき方程式が得られる。小問 (iii) は $x \cot x$ を $\ln(\sin x)$ に変える部分積分（integration by parts）であり、小問 (ii) は境界項を処理するためのものである。

解答

以下を通して、

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

とおく。

小問 (i)

サインの積分とコサインの積分は等しい。 $x = \frac{1}{2}\pi - t$ と置換すると、$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$、$\sin x = \cos t$ である。積分区間の端 $0, \frac{1}{2}\pi$ は $\frac{1}{2}\pi, 0$ となるが、負号によってもとの向きに戻る：

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \ln(\cos t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

$\sin 2x$ との関係。 等しい 2 つの積分を足し合わせ、$\ln a + \ln b = \ln(ab)$ を用いる（開区

間上で $\sin x, \cos x > 0$ なので成り立つ）：

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\tfrac{1}{2}\sin 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\pi \ln 2. \end{aligned}$$

両辺を 2 で割ると $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\pi \ln 2$ となり、1 つ目の等式の連鎖が示された。

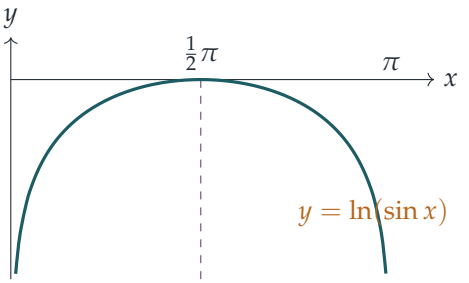
2 つ目の連鎖。 $u = 2x$ とおくと $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$ であり、積分区間の端は 0 と π になる：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u.$$

ここで $[0, \pi]$ を $\frac{1}{2}\pi$ で分割する。後半では $u = \pi - v$ と置換する。$\sin(\pi - v) = \sin v$ であり、積分区間の端 $\frac{1}{2}\pi, \pi$ は $\frac{1}{2}\pi, 0$ になるので、

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin v)\,\mathrm{d}v = I.$$

下のグラフはこの対称性を表している。曲線 $y = \ln(\sin x)$ は $x = \frac{1}{2}\pi$ に関して対称である。



よって $\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = 2I$ であり、したがって

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(2I) = I,$$

となり、示すべきことが示された。

I の値を求める。 2 つ目の結果を 1 つ目に代入すると、

$$I = \tfrac{1}{2}I - \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$$

この段階では I が有限の値であることが必要であり、そのために問題文では収束（convergence）を仮定してよいとしているのである。それがなければ、「$I = \frac{1}{2}I + c$」からは何も証明できない。

小問 (ii)

$x \geq 1$ とし、$u = \sqrt{x}$ とおく。すると $u \geq 1$ なので、与えられた不等式が適用できる：

$$\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}, \qquad \text{すなわち} \qquad \tfrac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}.$$

1 つ目の極限。 $x \geq 1$ のとき $\ln x \geq 0$ であり、$\ln x < 2\sqrt{x}$ を $x > 0$ で割ると

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

を得る。右辺は $x \to \infty$ のとき 0 に近づくので、はさみうちの原理 (squeeze (sandwich) principle) により $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ である。

2 つ目の極限。 $0 < x < 1$ に対して $x = 1/t$ とおくと、$t > 1$ であり、$x \to 0^+$ のとき $t \to \infty$ である。すると

$$x \ln x = \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{t} \to 0$$

が 1 つ目の極限から従う。よって x が正の値をとりながら $x \to 0$ とするとき、$x \ln x \to 0$ である。

小問 (iii)

まず、被積分関数は 0 で問題を起こさないことに注意する：$x \cot x = \dfrac{x}{\sin x} \cos x \to 1$ である。$(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上で $\cot x$ は $\ln(\sin x)$ の導関数なので、$u = x$、$\mathrm{d}v = \cot x \, \mathrm{d}x$、$v = \ln(\sin x)$ として部分積分を行う。対数は 0 で発散するので、$[\varepsilon, \frac{1}{2}\pi]$ 上で計算してから $\varepsilon \to 0^+$ とする：

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln(\sin x) \Big]_\varepsilon^{\frac{1}{2}\pi} - \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x) \, \mathrm{d}x.$$

上端では $\ln(\sin \frac{1}{2}\pi) = \ln 1 = 0$ である。よって境界項は単に $-\varepsilon \ln(\sin \varepsilon)$ となる。

> **考えてみよう** なぜ $\varepsilon \ln(\sin \varepsilon)$ は 0 に近づくのだろうか。小問 (ii) が扱っているのは $x \ln x$ であって、$x \ln(\sin x)$ ではない。

$s = \sin \varepsilon$ とおく。$\varepsilon \to 0^+$ のとき、s は正の値をとりながら 0 に近づく。すると

$$\varepsilon \ln(\sin \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \cdot s \ln s.$$

第 1 の因子は 1 に近づき（よく知られた極限 $\sin \varepsilon / \varepsilon \to 1$）、$s \ln s \to 0$ は小問 (ii) による。よって境界項は 0 に近づく。

$\varepsilon \to 0^+$ とし、小問 (i) を用いると：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x = 0 - I = \tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$$

検算

- 符号：区間上で $\ln(\sin x) \leq 0$ なので I は負でなければならず、実際 $-\frac{1}{2}\pi \ln 2 \approx -1.0888$ は負である。一方、$(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上で $x \cot x > 0$ であり、得られた答えは正である。
- 大きさ：$x \cot x$ は長さ $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$ の区間で 1 から 0 まで減少するので、積分の値がおよそ 1.09 というのは妥当である。
- 数値的には、中点則による数値積分で $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x \approx 1.0887930$ となり、$\frac{1}{2}\pi \ln 2 = 1.0887930\ldots$ と一致する。また $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x) \, \mathrm{d}x \approx -1.08879$ である。

よくある間違い

- $u = 2x$ に置換する際に $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$ の係数 $\frac{1}{2}$ を忘れてしまい、$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x) \, \mathrm{d}x = 2I$ となって行き詰まる。
- 小問 (iii) で、0 における極限を正当化せずに $[x \ln(\sin x)]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 0$ と書いてしまう。その極限こそ、小問 (ii) が用意されている理由である。

STEP のその先へ

ここで扱った積分はどちらも**広義積分**（improper integral）である。すなわち、被積分関数、あるいは用いた原始関数が、区間の端点で有界でない。広義積分は、ε を用いて行ったように極限として定義される。大学の最初の解析学の講義ではこれを厳密に扱い、そのような極限が存在するための判定法を学ぶ。問題文の「仮定してよい」という一文の背後にあるのは、こうした判定法である。同じ対称性の技法を使えば、$\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x) \, \mathrm{d}x = 0$ など、さらに多くの積分の値を求めることができる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、これらすべての土台となる極限と積分の理論を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。