解答例

STEP III 1991、第 6 問

純粋数学 ・ 双曲型の一次変換

> **STEP III 1991、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.6 節「**双曲的回転と相対性理論**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/hyperbolic-rotations.html

鍵となる考え方

この行列は回転行列（rotation matrix）のようにふるまうが、三角関数の代わりに双曲線関数（hyperbolic functions）が現れる。恒等式 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ と、cosh および sinh の加法定理（addition formulae）がすべての仕事をしてくれる。傾き $\tanh v$ の方向をベクトル $(\cosh v, \sinh v)$ として書くと、T が傾きに与える効果は明らかになる。それは単に「双曲角」v に u を加えるだけである。角の条件については、2 直線のなす角の正接を v_1 と v_2 で表し、何が不変でなければならないかを調べる。

解答

以下を通して $c = \cosh u$、$s = \sinh u$ と書く。すると $c^2 - s^2 = 1$ であり、$u > 0$ より $s > 0$ である。変換は次のとおりである。

$$x' = cx + sy, \qquad y' = sx + cy.$$

双曲線

任意の点について、

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 &= (cx + sy)^2 - (sx + cy)^2 \\ &= (c^2 - s^2)x^2 + 2csxy - 2csxy - (c^2 - s^2)y^2 \\ &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

よって T は $x^2 - y^2$ を保ち、$x^2 - y^2 = 1$ 上のすべての点は $x^2 - y^2 = 1$ 上の点に移される。この曲線は単に自分自身の中へ写されるだけでなく、すべて覆われる。実際、u を $-u$ に置き換えた行列は T の逆行列（inverse）であり（掛け算を展開して $c^2 - s^2 = 1$ を用いよ）、これも $x^2 - y^2$ を保つ。したがって双曲線上のすべての点は、双曲線上のある点の像である。曲線は自分自身に変換される。

（実際、各分枝（branch）はそれ自身に移る。$x \geq 1$ ならば $|y| < x$ であるから、$x' = cx + sy > (c - s)x = \mathrm{e}^{-u}x > 0$ となる。）

原点を通る不変直線

T は線形（linear）なので、原点を原点に移し、方向 $\mathbf{d}$ の原点を通る直線を、方向 $T\mathbf{d}$ の原点を通る直線に移す。よって $T\mathbf{d}$ が $\mathbf{d}$ に平行であること、すなわち $\mathbf{d}$ が固有ベクトル（eigenvector）であることが必要である。$\mathbf{d} = (1, m)$ を試すと

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + sm \\ s + cm \end{pmatrix},$$

となり、これが $(1, m)$ に平行となるのは $s + cm = m(c + sm)$、すなわち $s(1 - m^2) = 0$ のときに限る。$s \neq 0$ であるから $m = \pm 1$ である。（鉛直方向 $(0, 1)$ は (s, c) に移り、これは鉛直ではないので、新しいものは得られない。）2本の直線は

$$\boxed{y = x \quad \text{および} \quad y = -x}$$

であり、実際 $T(1, 1) = \mathrm{e}^{u}(1, 1)$、$T(1, -1) = \mathrm{e}^{-u}(1, -1)$ である。これらは双曲線の漸近線（asymptotes）であり、双曲線が自分自身に写されることと整合している。

傾き：$v' = v + u$

点 $\mathbf{p}$ を通り方向 $\mathbf{d}$ をもつ直線をとる。その上の点は $\mathbf{p} + t\mathbf{d}$ である。線形性より、その像は $T\mathbf{p} + tT\mathbf{d}$ であり、これは $T\mathbf{p}$ を通り方向 $T\mathbf{d}$ をもつ直線である。よって直線の位置は無関係で、方向だけが問題となる。

傾き $\tanh v$ の直線は方向 $(1, \tanh v)$ をもつ。$\cosh v > 0$ を掛ければ、方向は

$(\cosh v, \sinh v)$ としてもよい。すると

$$T\begin{pmatrix}\cosh v\\ \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh u\cosh v + \sinh u \sinh v\\ \sinh u\cosh v + \cosh u \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(u+v)\\ \sinh(u+v)\end{pmatrix}$$

が加法定理より成り立つ。したがって像の直線の傾きは $\tanh(v+u)$ である。tanh は単射（one-to-one）なので、$\tanh v' = \tanh(v+u)$ から

$$v' = v + u,$$

が得られ、示すべきことが示された。（この形に書けるのは傾きが -1 より大きく 1 より小さい直線だけであり、そのために問題では $\tanh v$ を用いている。）

等しい角

2 直線の傾きが m_1 と m_2 で、$1 + m_1 m_2 \neq 0$ ならば、それらのなす鋭角 θ は次を満たす。

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

ここでは $|m_1|, |m_2| < 1$ なので $1 + m_1 m_2 > 0$ である。よって 2 直線が垂直になることはなく、$\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ であり、θ は $\tan\theta$ によって決まる。

考えてみよう この式は $\tanh(v_1 - v_2)$ に似ているが、分母の符号が違う。代わりに何に簡約されるだろうか？

$m_i = \tanh v_i$ とおき、分子と分母に $\cosh v_1 \cosh v_2 > 0$ を掛けると

$$\tan\theta = \frac{|\sinh v_1 \cosh v_2 - \cosh v_1 \sinh v_2|}{\cosh v_1 \cosh v_2 + \sinh v_1 \sinh v_2} = \frac{|\sinh(v_1 - v_2)|}{\cosh(v_1 + v_2)}.$$

変換後の直線では $v_i' = v_i + u$ である。差は変わらないが、和は $2u$ だけ増えるので、それらのなす角 θ' は次を満たす。

$$\tan\theta' = \frac{|\sinh(v_1 - v_2)|}{\cosh(v_1 + v_2 + 2u)}.$$

そもそも ℓ_1 と ℓ_2 が交わるためには $v_1 \neq v_2$ が必要なので、分子は 0 でない。よって

$$\theta = \theta' \iff \cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u).$$

$\cosh a = \cosh b$ となるのは $a = \pm b$ のときに限るから、これは $v_1 + v_2 = v_1 + v_2 + 2u$（$u > 0$ より不可能）か、$v_1 + v_2 = -(v_1 + v_2 + 2u)$ のいずれかを意味する。よって必要十分条件（necessary and sufficient condition）は

$$\boxed{v_1 + v_2 = -u}$$

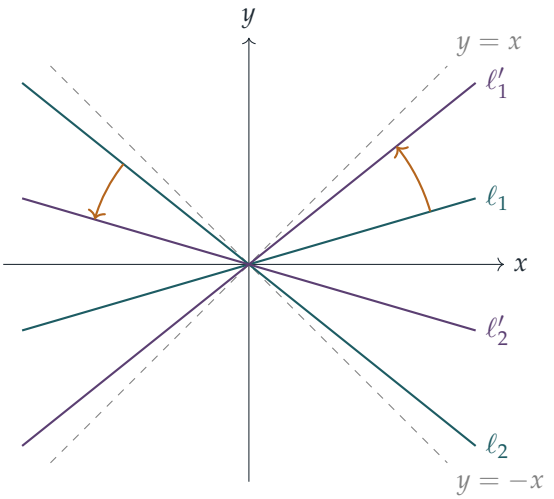
であり、同値な言い方をすれば $v_1' + v_2' = u$ である。

2 直線が原点で交わる場合の図

$v_1 + v_2 = -u$ のとき、

$$v_1' = v_1 + u = -v_2, \qquad v_2' = v_2 + u = -v_1.$$

となる。よって ℓ_1' の傾きは $-\tanh v_2$ であり、これは ℓ_2 の x 軸に関する鏡映（reflection）である。同様に ℓ_2' は ℓ_1 の鏡映である。2 直線が原点を通るならば、変換後の組は元の組を x 軸に関して折り返したものにすぎず、だからこそなす角が等しいのである。図では $u = 0.8$、$v_1 = 0.3$、$v_2 = -1.1$ を用いている。傾きは ℓ_1, ℓ_2 についてそれぞれ約 0.29 と -0.80、ℓ_1', ℓ_2' については 0.80 と -0.29 である。各直線は、T が引き伸ばす不変直線 $y = x$ の方へ回転する。



ティール色の直線が ℓ_1, ℓ_2、プラム色の直線がそれらの像であり、琥珀色の矢印は $\ell_1 \to \ell_1'$ と $\ell_2 \to \ell_2'$ を表す。プラム色の組は、ティール色の組を x 軸に関して鏡映したものである。

検算

- $u = 0.8$、$v_1 = 0.3$、$v_2 = -1.1$ のとき、ℓ_1 と ℓ_2 のなす角も、それらの像のなす角も、数値的にいずれも 54.92° となる。v_2 を少し変えると 2 つの角は異なる。
- $u \to 0$ とすると T は恒等変換になり、条件は $v_1 + v_2 = 0$ となる。これは x 軸に関して対称な 2 直線であり、恒等写像は当然それを対称なまま保つ。
- $\cosh u + \sinh u = \mathrm{e}^u$ なので、$T(1,1) = \mathrm{e}^u(1,1)$ は手計算で容易に確かめられる。

よくある間違い

- 双曲線が自分自身の**中へ**写されることだけを示してしまう。逆変換を用いれば、取りこぼしがないことがわかる。
- 角の公式を $\tanh(v_1 - v_2)$ と書いてしまう。$1 + m_1 m_2$ の $+$ の符号のために、分母には代わりに $\cosh(v_1 + v_2)$ が現れ、T によって変化するのは**和**のほうである。
- $\cosh a = \cosh b$ の解 $v_1 + v_2 = v_1 + v_2 + 2u$ を忘れ、それが不可能である理由を述べない。

STEP のその先へ

この行列は特殊相対性理論（special relativity）におけるローレンツ・ブースト（Lorentz boost）であり、x と y がそれぞれ時間と空間の役割を果たす（光速を 1 とする単位系で）。量 $x^2 - y^2$ は不変間隔（invariant interval）、$\tanh v$ は速度であり、v はその**ラピディティ**（rapidity）である。結果 $v' = v + u$ はラピディティが加法的であることを述べており、これは相対論的な速度の合成則を姿を変えて表したものである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics* は、特殊相対性理論をこのように展開している。不変直線を固有ベクトルの観点から見るには、Strang の *Introduction to Linear Algebra* を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。