解答例

STEP III 1991、第 5 問

純粋数学 • 極方程式の曲線と常微分方程式

> **STEP III 1991、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q5

鍵となる考え方

極座標（polar coordinates）のことはいったん忘れよう。この方程式は、θ を変数とする定数係数の線形 2 階常微分方程式（linear second-order ODE with constant coefficients）にすぎない。通常の方法（余関数と特殊解の和）で解き、$\theta = \frac{\pi}{2}$ における条件から定数を決め、それから幾何に戻ればよい。$r = f(\theta)$ で与えられる曲線は、r が 0 から始まって 0 で終わり、その間で正であり続けるとき閉曲線（closed loop）となり、その面積は $\frac{1}{2}\int r^2 \,\mathrm{d}\theta$ である。

解答

微分方程式を解く

特性方程式（auxiliary equation）$m^2 + 4 = 0$ の解は $m = \pm 2\mathrm{i}$ であるから、余関数（complementary function）は

$$r = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta.$$

である。特殊解（particular integral）については、$\sin 3\theta$ は余関数に含まれないので、$r = k\sin 3\theta$ とおいてみる。すると $r'' = -9k\sin 3\theta$ であり、

$$-9k\sin 3\theta + 4k\sin 3\theta = 5\sin 3\theta \quad \Longrightarrow \quad k = -1.$$

よって一般解（general solution）は

$$r = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta - \sin 3\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2A\sin 2\theta + 2B\cos 2\theta - 3\cos 3\theta.$$

である。$\theta = \frac{\pi}{2}$ では $\cos 2\theta = -1$、$\sin 2\theta = 0$、$\sin 3\theta = -1$、$\cos 3\theta = 0$ である。二つの条件は

$$r = -A + 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2B = -2 \quad \Longrightarrow \quad B = 1.$$

となる。したがって

$$r = \sin 2\theta - \sin 3\theta.$$

曲線は閉曲線である

r がどこで 0 になり、どのような符号をとるかを調べるため、恒等式 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$ を用いて因数分解する：

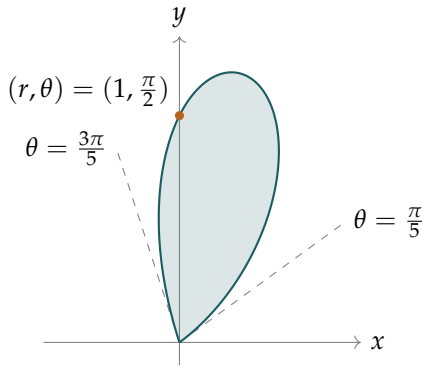
$$r = 2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) = -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2}.$$

考えてみよう 因数分解した形によって、なぜ「閉曲線」の問題に決着がつくのか？

与えられた範囲では、どちらの因数もすぐに読み取れるからである。$\frac{\pi}{5} \le \theta \le \frac{3\pi}{5}$ のとき：

- $\frac{\theta}{2}$ は $\left[\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\right]$ にあるので、$\sin\frac{\theta}{2} > 0$ である；
- $\frac{5\theta}{2}$ は $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ にあるので、$\cos\frac{5\theta}{2} \le 0$ であり、等号が成り立つのは両端のみである。

よって $\theta = \frac{\pi}{5}$ と $\theta = \frac{3\pi}{5}$ で $r = 0$ となり、その間の（両端を除く）すべての θ で $r > 0$ である。したがって曲線は半直線 $\theta = \frac{\pi}{5}$ に沿って原点を出発し、正の r を保ちながら回り込み、半直線 $\theta = \frac{3\pi}{5}$ に沿って原点に戻る。その間の各半直線 $\theta =$ 定数 は曲線とちょうど 1 回交わる（その θ に対する $r > 0$ の唯一の点で交わる）ので、曲線は自分自身と交差しない。これは一つの閉曲線であり、領域 $0 \le r \le \sin 2\theta - \sin 3\theta$、$\frac{\pi}{5} \le \theta \le \frac{3\pi}{5}$ を囲む。



面積

囲まれる面積は

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\pi/5}^{3\pi/5} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/5}^{3\pi/5} \left(\sin^2 2\theta - 2\sin 2\theta \sin 3\theta + \sin^2 3\theta\right)\mathrm{d}\theta.$$

である。$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ と $2\sin P\sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$ を用いると、

$$r^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\cos 4\theta - \tfrac{1}{2}\cos 6\theta - \cos\theta + \cos 5\theta.$$

$D = \sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}$ とおく。$\left[\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right]$ で項ごとに積分し、$\sin(x+2\pi) = \sin x$ と $\sin(\pi - x) = \sin x$ を用いて各正弦を $\pm\sin\frac{\pi}{5}$ または $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$ に帰着させる：

$$\begin{aligned}
\int 1\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{2\pi}{5},\\
\int -\tfrac{1}{2}\cos 4\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\tfrac{1}{8}\left[\sin\tfrac{12\pi}{5} - \sin\tfrac{4\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{8}\left[\sin\tfrac{2\pi}{5} - \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{8}D,\\
\int -\tfrac{1}{2}\cos 6\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\tfrac{1}{12}\left[\sin\tfrac{18\pi}{5} - \sin\tfrac{6\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{12}\left[-\sin\tfrac{2\pi}{5} + \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = \tfrac{1}{12}D,\\
\int -\cos\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\left[\sin\tfrac{3\pi}{5} - \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = -D,\\
\int \cos 5\theta\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{5}\left[\sin 3\pi - \sin\pi\right] = 0.
\end{aligned}$$

（3 行目では、$\sin\frac{18\pi}{5} = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\frac{2\pi}{5}$ および $\sin\frac{6\pi}{5} = -\sin\frac{\pi}{5}$ である。）これらを足し合わせると

$$\int_{\pi/5}^{3\pi/5} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{5} + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{12} - 1\right)D = \frac{2\pi}{5} - \frac{25}{24}D,$$

となり、これを半分にして

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{5} - \frac{25}{48}D = \frac{\pi}{5} + \frac{25}{48}\left[\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\right],$$

を得る。これが求める結果である。

検算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ において：$r = \sin\pi - \sin\frac{3\pi}{2} = 1$、$r' = 2\cos\pi - 3\cos\frac{3\pi}{2} = -2$ であり、条件どおりである。
- 数値的には $\mathcal{A} \approx 0.6283 - \frac{25}{48}(0.3633) \approx 0.4391$ である。$\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用しても、描いた閉曲線に靴ひも公式（shoelace formula）を適用しても、どちらも 0.43911 となる。$\theta = \frac{\pi}{2}$ から微分方程式を数値的に解き進めると $r = \sin 2\theta - \sin 3\theta$ が再現され、両端で r が 0 に戻ることも確認できる。

- 答えは妥当である：閉曲線は $r \approx 1.22$ まで達し、角度 $\frac{2\pi}{5}$ にわたって広がる。半径 1.22、中心角がこの角度の扇形（sector）の面積は約 0.93 であり、閉曲線はその半分よりやや小さい部分を占める。

よくある間違い

- 特殊解の符号を間違える：$(-9+4)k = 5$ から $k = -1$ であり、$+1$ ではない。
- 両端点の間で $r > 0$ であることを示し忘れる。r の零点が二つあるだけでは閉曲線にはならない。間で r の符号が変わる可能性があり、その場合 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ は囲まれる面積にはならない。
- $\sin\frac{12\pi}{5}$ や $\sin\frac{18\pi}{5}$ を不注意に簡約する：それぞれ $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$ であり、符号が重要である。

STEP のその先へ

ここでの方法がうまくいくのは、方程式が線形だからである。すべての解は一つの特殊解と、二つの独立な解 $\cos 2\theta$ と $\sin 2\theta$ の線形結合との和であり、二つの初期条件によってちょうど一つの解が選び出される。これが線形常微分方程式に対する解の存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）であり、大学 1 年次の講義で証明され、絶えず使われる。関連する魅力的な事実として、逆 2 乗の力（inverse-square force）のもとでの軌道に対して $u = 1/r$ が $u'' + u =$ 定数 を満たすことがあり、これによってニュートン（Newton）の法則から円錐曲線（conic section）の軌道が導かれる。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は線形理論を詳しく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。