解答例

STEP III 1991、第 4 問

純粋数学 ・ 空間の直線と平面

STEP III 1991、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s3-q4

鍵となる考え方

同じ観測者 O_1 からの異なる 2 本の視線（line of sight）はどちらも O_1 を通るので、1 つの平面を張る。そして P の軌跡はその両方と交わる。O_1 を通る 2 直線と交わり、かつ O_1 自身は通らない直線は、それら 2 直線のつくる平面上になければならない。O_2 についても同様であるから、軌跡は 2 平面の交線である。こうして、ねじれの位置（skew）にあるように見える 4 本の直線に関する問題が、外積（cross product）1 回と連立方程式（simultaneous equations）1 組の問題に帰着する。

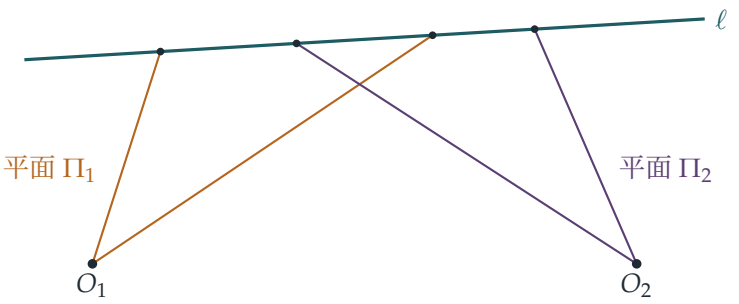
解答

P が動く直線を ℓ と書く。4 本の視線の方向は

$$\mathbf{d}_1 = (2,0,3), \qquad \mathbf{d}_1' = (0,3,4) \qquad (O_1 \text{ を通る}),$$

$$\mathbf{d}_2 = (-3,1,3), \qquad \mathbf{d}_2' = (-4,2,5) \qquad (O_2 \text{ を通る}).$$

である。各視線は観測者と P のある位置を結ぶものであるから、ℓ はこれら 4 本すべてと交わる。



（模式図にすぎない。琥珀色の2本の視線と ℓ は1つの平面 Π_1 上にあり、紫色の2本と ℓ は別の平面 Π_2 上にある。）

ℓ が各観測者を通る平面上にある理由

まず、ℓ は O_1 を通り得ない。もし通るなら、$P \neq O_1$ であるときはいつでも O_1 からの視線は ℓ そのものとなり、O_1 からの異なる2本の視線は存在し得ないからである。同様に ℓ は O_2 を通らない。

O_1 からの2本の視線は O_1 を通る異なる直線であるから、O_1 のみで交わり、1つの平面 Π_1 を張る。直線 ℓ はそれらと2点で交わり、その2点は異なる。共有点は O_1 のみであり、ℓ は O_1 を通らないからである。2点とも Π_1 上にあるので、ℓ 全体が Π_1 上にある。同様にして、ℓ は O_2 を通り $\mathbf{d}_2$ と $\mathbf{d}_2'$ を含む平面 Π_2 上にある。

考えてみよう ℓ は特定の平面上にあることなく、各視線とただ1点で交わるだけ、ということはあり得ないのか？

1本の直線についてなら、あり得る。しかしここでは、交点のうち2つが O_1 を通る直線上にあり、異なる2点は ℓ を決定する。その2点はともに Π_1 上にあるので、ℓ に選択の余地はない。ℓ はその2点を通る直線であり、それは Π_1 上にある。

平面 Π_1

Π_1 の法線ベクトル（normal）は

$$\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_1' = (2,0,3) \times (0,3,4) = (0-9,\ 0-8,\ 6-0) = (-9,-8,6),$$

であり、Π_1 は原点を通るので

$$\Pi_1 : \quad 9x + 8y - 6z = 0.$$

である。

平面 Π_2

Π_2 の法線ベクトルは

$$\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_2' = (-3,1,3) \times (-4,2,5) = (5-6,\ -12+15,\ -6+4) = (-1,3,-2),$$

であり、Π_2 は $O_2(8a,0,0)$ を通るので $-(x-8a)+3y-2z=0$、すなわち

$$\Pi_2 : \quad x-3y+2z=8a.$$

である。(簡単な確認：$(-3,1,3)\cdot(-1,3,-2)=3+3-6=0$、$(-4,2,5)\cdot(-1,3,-2)=4+6-10=0$。)

$a \neq 0$ と仮定する。そうでなければ 2 人の観測者が一致してしまう。このとき O_2 は Π_1 上になく（$9\cdot 8a \neq 0$ より)、O_1 は Π_2 上にない。これは上で述べたことと整合する。

軌跡

法線ベクトル $(-9,-8,6)$ と $(-1,3,-2)$ は平行でないので、Π_1 と Π_2 はただ 1 本の直線で交わり、その直線が ℓ でなければならない。その方向は両方の法線ベクトルに垂直であり、

$$(-9,-8,6) \times (-1,3,-2) = (16-18,\ -6-18,\ -27-8) = (-2,-24,-35),$$

であるから、方向として $(2,24,35)$ をとることができる。この直線上の点を求めるため、$y=0$ とおく。方程式は $9x=6z$ および $x+2z=8a$ となるので、$x=\frac{2}{3}z$、$\frac{8}{3}z=8a$ である。これより $z=3a$、$x=2a$ を得る。よって $(2a,0,3a)$ は ℓ 上にある。この点は O_1 からの 1 本目の視線上にもあり、当然そうあるべきである。

したがって P の軌跡は

$$\boxed{\frac{x-2a}{2}=\frac{y}{24}=\frac{z-3a}{35}}$$

であり、同値な表し方をすれば、2 つの方程式 $9x+8y-6z=0$ と $x-3y+2z=8a$ の組である。

最後に、ℓ が確かに 4 本の視線すべてと、観測者以外の点で交わることを確かめる。ℓ を $(2a+2\lambda,\ 24\lambda,\ 3a+35\lambda)$ と表すと、各視線との交点はそれぞれ

$$(2a,0,3a), \qquad (0,-24a,-32a), \qquad \left(\tfrac{80a}{37},\tfrac{72a}{37},\tfrac{216a}{37}\right), \qquad \left(\tfrac{56a}{25},\tfrac{72a}{25},\tfrac{36a}{5}\right)$$

である。

考えてみよう 2 番目の点は $a>0$ のとき y と z が負である。これは問題ではないのか？

視線は直線全体として与えられており、$(0, -24a, -32a)$ は $x = 0$、$y/3 = z/4$ を満たす。我々が用いたのは直線だけで、観測者がどちらを向いていたかは用いていないので、答えはこのままでよい。「視線」を観測者から出る半直線（ray）と解釈するなら、この観測は O_1 の背後にあることになる。これはデータの特異な点であって、方法の誤りではない。

検算

- 点 $(2a, 0, 3a)$ と方向 $(2, 24, 35)$ を両方の平面の方程式に代入する。$9(2) + 8(24) - 6(35) = 18 + 192 - 210 = 0$、$2 - 72 + 70 = 0$ であるから、方向は両方の平面に含まれる。
- $a = 1$ のとき、点 $\left(\frac{80}{37}, \frac{72}{37}, \frac{216}{37}\right)$ は $O_2 + \frac{72}{37}(-3, 1, 3)$ に等しく、また $\frac{80/37 - 2}{2} = \frac{3}{37} = \frac{72/37}{24}$ である。よってこの点は視線上にも軌跡上にもある。
- いくつかの a の値について、4 つの交点すべてを有理数の厳密な計算で確かめた。

よくある間違い

- 視線どうしの交点を求めようとすること。異なる観測者から異なる時刻に引いた視線は、そもそも交わるとは限らない。
- Π_2 が原点ではなく O_2 を通ることを忘れ、$= 8a$ ではなく $x - 3y + 2z = 0$ としてしまうこと。
- 外積の符号の誤り。必ず法線ベクトルと両方の方向ベクトルとの内積をとって確認すること。

STEP のその先へ

空間内の与えられた 4 本の直線すべてと交わる直線は何本あるだろうか。一般の位置（general position）にある 4 本の直線に対しては、答えは 2 本である（複素数の範囲で数えた場合。実数の範囲では 0 本のこともある）。これは数え上げ幾何学（enumerative geometry）の古典的な結果であり、ここでの 4 本の直線は、2 本ずつ 2 人の観測者を通るという点で特殊である。同じ「視線の平面」という考え方は、三角測量（triangulation）や、2 台のカメラから点の 3 次元的な位置を復元するステレオ視（stereo vision）のエピポーラ幾何（epipolar geometry）の根底にもある。直線・平面・交わりの線形代数については、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。