解答例

# STEP III 1991、第 3 問

純粋数学 ・ 区分的に定義された関数と逆関数

> **STEP III 1991、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q3

## 鍵となる考え方

絶対値（modulus）とは、中身の符号が変わるところで式が切り替わる関数にすぎない。ここに現れる三つの絶対値の中身は $x = -1$、0、1 でのみ符号を変えるので、それらが $x < 2$ を区切ってできる四つの区間（interval）のそれぞれで、この関数は普通の二次関数（quadratic）になる。四つの二次関数が求まれば、どの問い（極値点（turning point）、変曲点（inflection）、連続性（continuity）、滑らかさ（smoothness）、逆関数（inverse））も、単純な放物線（parabola）とそのつながり方についての問いになる。

## 解答

### 絶対値を外す

中身を因数分解する：$x^2 - x = x(x-1)$、$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$、$x^2 + x = x(x+1)$。それぞれの符号は次のとおりである。

| 区間 | $x^2 - x$ | $x^2 - 1$ | $x^2 + x$ | $\mathrm{f}(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x \le -1$ | $+$ | $+$ | $+$ | $x^2 - 4x - 1$ |
| $-1 \le x \le 0$ | $+$ | $-$ | $-$ | $3x^2 + 1$ |
| $0 \le x \le 1$ | $-$ | $-$ | $+$ | $1 - 5x^2$ |
| $1 \le x < 2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $x^2 - 4x - 1$ |

たとえば $-1 \le x \le 0$ では

$$\mathrm{f}(x) = 2(x^2 - x) + (1 - x^2) + 2(x^2 + x) = 3x^2 + 1,$$

であり、$0 \le x \le 1$ では $\mathrm{f}(x) = -2(x^2 - x) + (1 - x^2) - 2(x^2 + x) = 1 - 5x^2$ である。外

側の二つの区間では三つの中身がすべて正であり、$2(x^2-x)+(x^2-1)-2(x^2+x)=x^2-4x-1$ となる。区間の端点ではいずれかの中身が 0 になるので、そこではどちらの式を使っても正しい。

### 連続性と微分可能性

f は $|\cdot|$ と多項式という連続な関数から作られているので、f は $x<2$ 上で**至るところ連続**である。確認として、つなぎ目では隣り合う式の値が一致する：$f(-1)=4$、$f(0)=1$、$f(1)=-4$。

微分可能性（differentiability）については、つなぎ目での片側微分係数（one-sided derivative）を比べる。四つの部分の導関数は $2x-4$、$6x$、$-10x$、$2x-4$ である。

- $x=-1$ において：左側からは $2(-1)-4=-6$、右側からは $6(-1)=-6$。これらは一致するので、$f'(-1)=-6$ である。
- $x=0$ において：両側とも 0 となるので、$f'(0)=0$ である。
- $x=1$ において：左側からは $-10$、右側からは $2-4=-2$。これらは異なるので、グラフは $(1,-4)$ で**角**（corner）をもつ。

したがって f は**至るところ微分可能というわけではない**。微分可能でないのはちょうど $x=1$ においてである。

### 極値点と変曲点

どの部分でも、ただ一点 $x=0$ を除いて $f'<0$ である。

- $x<-1$ および $1<x<2$：$x<2$ より $f'(x)=2x-4<0$。
- $-1<x<0$：$f'(x)=6x<0$。
- $0<x<1$：$f'(x)=-10x<0$。

f は連続であり、各部分で狭義に減少するので、$x<2$ **全体で狭義単調減少**（strictly decreasing）である。とくに、**極大点や極小点は存在しない**。局所的なもの（local maximum/minimum）すら存在しない。

> **考えてみよう** $f'(0)=0$ なのだから、$(0,1)$ は極値点ではないのか？

そうではない。左側の部分 $3x^2+1$ は 0 で最小値をとり、右側の部分 $1-5x^2$ はそこで最大値をとるが、それぞれの式が適用される区間の上では、どちらも減少している。したがって f は水平な接線をもちながら、減少したまま $x=0$ を通過する。

次に凹凸（concavity）を調べる。各部分の第 2 次導関数は

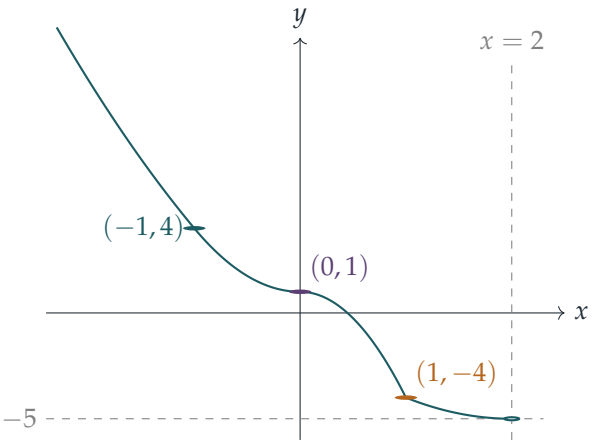
$$f'' = 2\ (x < -1), \qquad 6\ (-1 < x < 0), \qquad -10\ (0 < x < 1), \qquad 2\ (1 < x < 2).$$

である。

- $x = 0$ ではグラフが下に凸（convex）から上に凸（concave）へと変わり、そこで接線（tangent）をもつので、$(0, 1)$ は**停留変曲点**（stationary point of inflection）である。
- $x = -1$ では $f''$ は 2 から 6 へと跳ぶが正のままなので、変曲点ではない。
- $x = 1$ では曲線は上に凸から再び下に凸へと変わるが、そこには角があって接線が存在しない。通常の定義（曲線を横切る接線）によれば、$(1, -4)$ は変曲点ではない。答案ではこのことを明示しておく価値がある。

**概形**

$x \to -\infty$ のとき $f(x) \to +\infty$ である。$x \to 2^-$ のとき $f(x) \to 4 - 8 - 1 = -5$ であり、この値はとられない。




曲線は全体を通して下がり続ける。$(0, 1)$ では平らになって水平な変曲点となり、$(1, -4)$ では角をもち、そこで傾きが $-10$ から $-2$ へと跳ぶ。

**逆関数**

f は $x < 2$ 上で連続かつ狭義単調減少であり、左側で $f \to \infty$、右側で $f \to -5$ となるので、$(-\infty, 2)$ から $(-5, \infty)$ への全単射（bijection）である。よって $f^{-1}$ は $x > -5$ で定義される。$y = f(x)$ として、各部分をそれがとる値の範囲の上で逆に解く。

- $x \le -1$、値域 $y \ge 4$：$y = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5$ より $(x-2)^2 = y+5$。ここでは $x - 2 < 0$ なので負の平方根をとり、$x = 2 - \sqrt{y+5}$。
- $-1 \le x \le 0$、値域 $1 \le y \le 4$：$x^2 = (y-1)/3$ であり、$x \le 0$ なので $x = -\sqrt{(y-1)/3}$。
- $0 \le x \le 1$、値域 $-4 \le y \le 1$：$x^2 = (1-y)/5$ であり、$x \ge 0$ なので $x = \sqrt{(1-y)/5}$。
- $1 \le x < 2$、値域 $-5 < y \le -4$：再び $(x-2)^2 = y+5$ かつ $x - 2 < 0$ なので、$x = 2 - \sqrt{y+5}$。

変数を $x$ に書き直すと

$$\mathrm{f}^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x+5}, & -5 < x \le -4, \\ \sqrt{\frac{1-x}{5}}, & -4 \le x \le 1, \\ -\sqrt{\frac{x-1}{3}}, & 1 \le x \le 4, \\ 2 - \sqrt{x+5}, & x \ge 4. \end{cases}$$

となる。共有する端点では式の値が一致する。たとえば $x = 4$ ではどちらも $-1$ を与え、$x = -4$ ではどちらも $1$ を与える。

## 検算

- 特定の値で確かめる：$\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$ であり、$1 - 5 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ である。また $\mathrm{f}^{-1}(-\frac{1}{4}) = \sqrt{1.25/5} = \frac{1}{2}$ である。
- 直接計算すると $\mathrm{f}(-3) = 2 \cdot 12 + 8 - 2 \cdot 6 = 20$ である。式からは $9 + 12 - 1 = 20$ が得られ、$\mathrm{f}^{-1}(20) = 2 - \sqrt{25} = -3$ である。
- 数値的に、$10^5$ 個のランダムな $x < 2$ に対して $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(x)) = x$ が成り立ち、細かい格子のすべての点で関数は減少しており、$x = 1$ での片側の傾きは $-10$ と $-2$ になる。

## よくある間違い

- $\mathrm{f}'(0) = 0$ であることから、$(0, 1)$ を極大または極小と呼んでしまう。各放物線自身の頂点は、それがその式の成り立つ区間の端にあるならば、関係がない。
- 逆関数で誤った平方根を選んでしまう。各区間における $x$（または $x-2$）の符号によって決まる。
- 二つの式のつなぎ目は必ず微分可能でない点だと思い込んでしまう。$x = -1$ と $x = 0$ では傾きが一致している。

## STEP のその先へ

区分的に定義された関数は、微分可能でなくても連続であることがあり、また第 2 次導関数が連続でなくても微分可能であることがある（ここでは $\mathrm{f}''$ が $x = -1$ と $x = 0$ で跳ぶ）。逆関数定理（inverse function theorem）によれば、狭義単調（monotonic）な連続関数は連続な逆関数をもち、その逆関数は $\mathrm{f}' \neq 0$ となるところでは微分可能である。$\mathrm{f}^{-1}$ が $x = 1$ で鉛直な接線（vertical tangent）をもつことに注意しよう。これはちょうど $\mathrm{f}'(0) = 0$ となるところに対応している。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。