解答例

STEP III 1991、第 2 問

純粋数学 ・ 図形における複素数

STEP III 1991、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s3-q2

鍵となる考え方

1 つの複素数（complex number）は、長さの比と角の両方を同時に表すことができる。商 $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$ は、P_1 における三角形の 2 辺の長さの比（その絶対値（modulus））と、一方の辺からもう一方の辺への回転（その偏角（argument））を記録している。そしてこの 2 つの情報こそ、相似（similarity）の二辺夾角による判定条件（SAS）に必要なものである。条件を行列式（determinant）の形に直してしまえば、各小問は行列式の因数分解（factorisation）に帰着するか、比較の相手となる三角形 $Q_1Q_2Q_3$ をうまく選ぶ問題に帰着する。

解答

まず誤植について

問題文に印刷されたとおりでは、左辺の分母は $z_2 - z_3$ となっている。しかしこれは正しいはずがない。$w_i = z_i$ とおき、2 つの三角形を同一にしてみよう。このとき右辺は $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$ となり、$z_2 \neq z_1$ であるから左辺とは異なる。意図されている条件、すなわち行列式と対応する条件は

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}. \qquad (*)$$

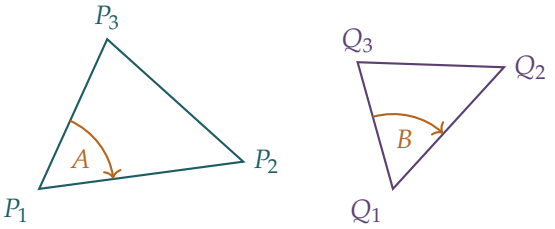
である。以下ではこれを証明する。

相似の条件

三角形 $P_1P_2P_3$ の P_1 における角を A とする。したがって $0 < A < \pi$ である。極形式（polar form）で書くと

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{P_1P_2}{P_1P_3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

となる。ここで θ は、$\overrightarrow{P_1P_3}$ の向きから $\overrightarrow{P_1P_2}$ の向きへ移るときに回転する角である。よって $P_1 \to P_2 \to P_3$ が反時計回りならば $\theta = -A$ であり（P_1P_3 から時計回りに回して P_1P_2 に至る）、時計回りならば $\theta = +A$ である。要するに、この商の偏角（$(-\pi, \pi)$ の範囲でとる）の大きさは P_1 における角に等しく、その符号は三角形の向きを表している。Q_1 における角を B とすれば、w についても同じことが成り立つ。



同じ向きに相似 $\Rightarrow (*)$。三角形が $P_i \leftrightarrow Q_i$ の対応で相似ならば、P_1 と Q_1 における辺の比は等しく $P_1P_2/P_1P_3 = Q_1Q_2/Q_1Q_3$ であり、そこでの角も等しく $A = B$ である。2つの三角形は同じ向きなので、2つの偏角 $\mp A$ と $\mp B$ は同じ符号をもち、したがって等しい。絶対値が等しく偏角も等しいので、$(*)$ が得られる。

$(*) \Rightarrow$ **同じ向きに相似。** $(*)$ が成り立つならば、絶対値を比較して $P_1P_2/P_1P_3 = Q_1Q_2/Q_1Q_3$ を得る。偏角を比較すると $A = B$ が得られ、さらに符号も等しいので、2つの三角形は同じ向きである。2辺の比が等しくその間の角が等しいというのは二辺夾角の条件（SAS）であるから、三角形は $P_i \leftrightarrow Q_i$ の対応で相似である。（$(*)$ が実数である場合は、どちらの3点も同一直線上（collinear）にあり、退化した「三角形」どうしはやはり相似である。）

同じ事実を別の見方で捉えることもできる。$(*)$ はまさに、定数 $a = (w_1 - w_2)/(z_1 - z_2) \neq 0$ と $b = w_1 - az_1$ に対して $w_i = az_i + b$ が成り立つことを意味している。写像 $z \mapsto az + b$ は、倍率 $|a|$ の拡大（enlargement）と角 $\arg a$ の回転と平行移動を合成したものであり、このような写像は形と向きを保つ。

行列式による表現

分母を払うと（点はすべて異なるので、分母はどちらも 0 でない）、$(*)$ は

$$(z_1 - z_2)(w_1 - w_3) - (z_1 - z_3)(w_1 - w_2) = 0.$$

と同値である。展開すると z_1w_1 の項は打ち消し合い、

$$z_1(w_2-w_3)-z_2(w_1-w_3)+z_3(w_1-w_2)=0,$$

が残る。これは行列式を第 1 行に沿って展開したものである。したがって $(*)$ は $\det=0$ と同じである。

各小問のためには、行列式を別の方法で計算しておくとよい。第 2 列と第 3 列から第 1 列を引き（行列式の値は変わらない）、$(1,0,0)$ となった最下行に沿って展開すると

$$\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ w_2-w_1 & w_3-w_1 \end{pmatrix}. \qquad (\dagger)$$

を得る。

小問 (i)

$w_i=z_i^2$ とすると、$(\dagger)$ は

$$\begin{aligned}(z_2-z_1)(z_3^2-z_1^2)-(z_3-z_1)(z_2^2-z_1^2) &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)[(z_3+z_1)-(z_2+z_1)] \\ &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_3-z_2).\end{aligned}$$

となる。z_i はすべて異なるので、どの因数も 0 でない。よって行列式は決して 0 にならず、2 つの三角形が（上の意味で）相似になることはない。

小問 (ii)

$w_i=z_i^3$ とし、$z_j^3-z_1^3=(z_j-z_1)(z_j^2+z_jz_1+z_1^2)$ を用いると

$$\begin{aligned}(z_2-z_1)(z_3^3-z_1^3)-(z_3-z_1)(z_2^3-z_1^3) &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)[(z_3^2+z_3z_1)-(z_2^2+z_2z_1)] \\ &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_1+z_2+z_3),\end{aligned}$$

となる。ここで $z_3^2-z_2^2+z_1(z_3-z_2)=(z_3-z_2)(z_3+z_2+z_1)$ を用いた。最初の 3 つの因数は 0 でないので、行列式が 0 になるのは $z_1+z_2+z_3=0$ のとき、かつそのときに限る。すなわち、2 つの三角形が相似であるための必要十分条件は、重心（centroid）$\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$ が原点であることである。

小問 (iii)

うまい手は、三角形をラベルを付け替えた自分自身と比べることである。Q_1,Q_2,Q_3 を P_2,P_3,P_1 とする。すなわち

$$w_1=z_2, \qquad w_2=z_3, \qquad w_3=z_1.$$

とおく。

考えてみよう なぜ「正三角形」がこのラベルの付け替えと関係するのだろうか。

$P_1 \leftrightarrow P_2$、$P_2 \leftrightarrow P_3$、$P_3 \leftrightarrow P_1$ の対応で相似であれば、対応する辺の比は共通の値 $k > 0$ をとらなければならない：

$$\frac{P_2P_3}{P_1P_2} = \frac{P_3P_1}{P_2P_3} = \frac{P_1P_2}{P_3P_1} = k.$$

3つを掛け合わせると $k^3 = 1$ となるので $k = 1$ であり、3辺はすべて等しい。逆に、三角形が正三角形（equilateral triangle）ならば、その中心のまわりの（適切な向きの）120° 回転によって $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$ と移る。回転は形と向きを保つので、この三角形はラベルを付け替えた自分自身と同じ向きに相似である。したがって

$$P_1P_2P_3 \text{ が正三角形} \iff \text{同じ向きに次と相似：} P_2P_3P_1.$$

最初の部分により、右辺が成り立つのは

$$0 = \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = z_1(z_3 - z_1) - z_2(z_2 - z_1) + z_3(z_2 - z_3),$$

のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$z_1z_3 - z_1^2 - z_2^2 + z_1z_2 + z_2z_3 - z_3^2 = 0 \iff z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2,$$

であり、これが示すべきことであった。

検算

- 小問 (ii)：$z_1, z_2, z_3 = 1, \omega, \omega^2$（$\omega = e^{2\pi i/3}$）は重心が 0 であるが、その3乗はすべて 1 に等しく、互いに異なるという条件を満たさない。代わりに $z = 1,\ i,\ -1 - i$ を試す。重心は 0 で、3乗は $1,\ -i,\ 2 - 2i$ である。どちらの三角形も、P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 の順に辺の長さが $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$ であり（この場合は合同でさえある）、どちらも反時計回りである。
- 小問 (iii)：$z = 0, 1, e^{i\pi/3}$ に対しては、$1 + e^{2i\pi/3} = e^{i\pi/3}$ であるから、両辺とも $e^{i\pi/3}$ に等しい。
- 10^4 個のランダムな三角形に対するコンピュータでの検証により、$w_i = az_i + b$ は常に $(*)$ を満たし、鏡映した三角形 $w_i = a\bar{z}_i + b$ は決して満たさないことが確かめられた。また、$(\dagger)$ の2つの因数分解と正三角形の判定条件も確かめられた。印刷されたとおりの条件（$z_2 - z_3$ を含むもの）は、実際に相似であるすべての場合で成り立たなかった。

よくある間違い

- 三角形の向きを無視すること。絶対値だけでは、鏡映を除いた相似しか得られない。鏡像の関係にある三角形は偏角の符号が逆になるので、$(*)$ を満たさない。
- 小問 (iii) で逆（converse）を忘れること。ラベルを付け替えた相似による議論は両方向に成り立たせる必要があり、また $k^3 = 1 \Rightarrow k = 1$ という段階では k が正の実数であることを用いている。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto az + b$ は、平面の向きを保つ相似変換（orientation-preserving similarity）である。これらは最も単純なメビウス（Möbius）変換（Möbius transformation）であり、4 点の複比（cross-ratio）は $(*)$ を一般化したものである。正三角形の条件は $(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$ と因数分解することもでき、これは z_1, z_2, z_3 がいずれかの向きに正三角形をなして並ぶことを表している。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数をこのように幾何的に考える見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。