解答例

STEP III 1991、第 14 問

力学 ・ ばねによる円運動

STEP III 1991、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

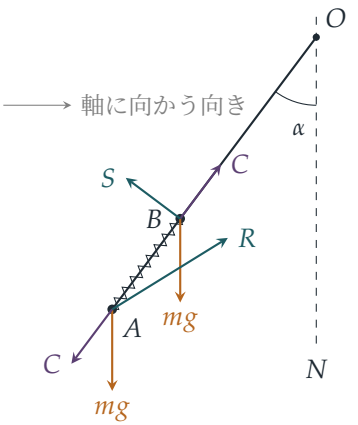
step.maths.org/questions/91-s3-q14

鍵となる考え方

すべてのものが同じ角速度（angular speed）で ON を軸とする水平な円周上を動くので、各質量がもつのは軸に向かう既知の加速度 $\omega^2 r$ だけである。**なめらかな**棒に通された輪（ring）については、棒に沿った方程式が最もすっきりしている。未知の垂直抗力（normal reaction）がそこから消えるからである。次に、ばねの力が輪と A にある質点を結びつけ、そこでの棒の抗力の向きから k が決まる。

解答

モデル。棒は軽くなめらかであり、A と B は質量 m の質点（particle）である。ばねは棒に沿って B と A の間にある。$\alpha = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ とおくと、$\sin\alpha = \frac{3}{5}$、$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ であり、また $\omega^2 = \frac{5g}{2a}$ である。$OB = x$ とおくと、$AB = 2a - x$ である。



ここで C はばねの推力（thrust）である（後でばねが圧縮されていることがわかるので、ばねは B を O の方へ押し、A を O から遠ざかる向きに押す）。S はなめらかな棒が B に及ぼす垂直抗力（棒に垂直で鉛直面内にあり、向きは後で求める）、R は棒が A に及ぼす抗力である。ω は一定で、B は棒に対して静止しているので、鉛直面を横切る向きの加速度はない。したがって、すべての力はこの鉛直面内にある。

長さ OB

B は半径 $x\sin\alpha$ の水平な円周上を動くので、その加速度は ON に向かって水平に $\omega^2 x\sin\alpha$ である。棒に沿って $O\to A$ の向き（下向きかつ軸から遠ざかる向き）に力を分解する（resolve）。加速度は軸の方を向き、棒は鉛直と角 α をなすので、この向きの加速度成分は $-\omega^2 x\sin\alpha\cdot\sin\alpha$ である。

B にはたらくばねの力を張力（tension）T（B を A の方へ引く向き）とおき、符号は計算に任せるのが最も簡単である。フックの法則（Hooke's law）より、

$$T=\frac{kmg\left((2a-x)-a\right)}{a}=\frac{kmg(a-x)}{a}.$$

棒はなめらかなので、抗力 S は棒に沿った成分をもたない。よって OA に沿って、

$$mg\cos\alpha+\frac{kmg(a-x)}{a}=-m\omega^2 x\sin^2\alpha.$$

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$、$\sin^2\alpha=\frac{9}{25}$、$\omega^2=\frac{5g}{2a}$ を用いると、右辺は $-\frac{9gx}{10a}\,m$ である。両辺を mg で割って $10a$ を掛けると、

$$\begin{aligned}8a+10k(a-x)&=-9x\\(10k+8)a&=(10k-9)x,\end{aligned}$$

よって

$$OB=x=\frac{(10k+8)a}{10k-9},$$

となり、示すべき式が得られた。$x>a$ であること（正の答えを得るには $10k>9$ が必要である）に注意すると、$AB=2a-x<a$ となる。つまりばねは圧縮されており、その推力は

$$C=-T=\frac{kmg(x-a)}{a}=\frac{17k\,mg}{10k-9},$$

である。ここで $x-a=\dfrac{17a}{10k-9}$ を用いた。

k を求める

考えてみよう なぜ A における抗力は、B における抗力のように棒に垂直ではないのだろうか？

A にある質点は棒に通されているのではなく、棒に**固定されて**いるので、棒はそれをどの向きにも押したり引いたりできる。なめらかさが制限するのは、すべる輪にはたらく力だけである。そこで R を成分で表し、軸に向かう水平成分を R_h、鉛直上向きの成分を R_v とする。

A は半径 $2a\sin\alpha = \frac{6a}{5}$ の円周上を動くので、その加速度は軸に向かって $\omega^2 \cdot \frac{6a}{5} = 3g$ である。推力 C は A に OA に沿って O から遠ざかる向きにはたらくので、軸から遠ざかる向きの成分 $C\sin\alpha$ と下向きの成分 $C\cos\alpha$ をもつ。よって

$$\begin{aligned} \text{水平方向（軸に向かう向き）：}\quad & R_h - \tfrac{3}{5}C = 3mg, \\ \text{鉛直方向：}\quad & R_v - mg - \tfrac{4}{5}C = 0. \end{aligned}$$

$C = c\,mg$ とおく。抗力は水平と角 $\tan^{-1}\frac{13}{21}$ をなすので、

$$\frac{R_v}{R_h} = \frac{1+\frac{4}{5}c}{3+\frac{3}{5}c} = \frac{13}{21} \implies 21 + \tfrac{84}{5}c = 39 + \tfrac{39}{5}c \implies 9c = 18, \quad c = 2.$$

（$c > 0$ のとき R_h と R_v はともに正なので、抗力は確かに上向きかつ内向きであり、符号のあいまいさはない。）すると

$$\frac{17k}{10k-9} = 2 \implies 17k = 20k - 18 \implies k = 6.$$

よって $k = 6$ であり、$OB = \frac{68a}{51} = \frac{4}{3}a$ となる。これは確かに a と $2a$ の間にある。また推力は $C = 2mg$ である。（このとき A にはたらく抗力は $R_h = \frac{21}{5}mg$、$R_v = \frac{13}{5}mg$ である。）

輪にはたらく抗力

考えてみよう 最小の手間で S を求めるには、どの向きに分解すればよいだろうか？

棒に垂直な向きである。そうすれば、ばねの力が消える。鉛直面内で OA に垂直で、**上向きかつ軸から遠ざかる向き**の単位方向をとる。これは水平と角 α をなすので、外向きの成分 $\cos\alpha$ と上向きの成分 $\sin\alpha$ をもつ。B にはたらく抗力のこの向きの成分を S とする。重力の寄与は $-mg\sin\alpha$ であり、加速度（軸に向かって $\omega^2 x\sin\alpha$）の寄与は $-\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha$ である。よって

$$S - mg\sin\alpha = -m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha.$$

$x = \frac{4}{3}a$ を代入すると、

$$m\omega^2 x \sin\alpha \cos\alpha = m \cdot \frac{5g}{2a} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{12}{25} = \frac{8}{5}mg, \qquad \text{よって} \qquad S = \frac{3}{5}mg - \frac{8}{5}mg = -mg.$$

したがって、棒と輪の間の抗力の大きさは

$$\boxed{mg},$$

であり、負の符号は、それが棒に垂直に**下向きかつ軸に向かう向き**にはたらくことを示している。

検算

- B についてベクトルで完全に確かめる（水平成分は軸に向かう向き、鉛直成分は上向きを正とする）。AO に沿ってはたらく $C = 2mg$ と、求めた $S = mg$ を用いる。水平方向：$\frac{3}{5}(2mg) + \frac{4}{5}(mg) = 2mg$ であり、$m\omega^2 x \sin\alpha = m \cdot \frac{5g}{2a} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{3}{5} = 2mg$ である。鉛直方向：$\frac{4}{5}(2mg) - \frac{3}{5}mg - mg = 0$ である。どちらもつり合っている。
- $k \to \infty$ のとき、ばねは変形しなくなり、$OB \to a$ すなわち自然長（natural length）に近づく。これは当然そうなるべき結果である。
- $m = g = a = 1$ として数値的に、無作為に選んだ 200 個の k の値に対して OB の公式を正確に確かめ、角 $\tan^{-1}\frac{13}{21}$ が得られるのは $k = 6$ のときだけであることを確認し、$|S| = 1.0$ を得た。また、小さな変位から始めて棒に沿った B の運動を数値的に追うと、それは $x \approx 1.3333$ の近くにとどまる。

よくある間違い

- ばねが伸びていると仮定してしまい、$x > a$ となって戸惑う。張力の符号は計算から自然に出てくるようにすればよい。
- A における抗力を棒に垂直であるとしてしまう。そのような制限があるのは、すべる輪だけである。
- 円運動の半径として $x\sin\alpha$ ではなく x を用いてしまう。

STEP のその先へ

棒とともに回転する座標系（rotating frame）では、B は外向きの「遠心力」（centrifugal force）$m\omega^2 r$ を受け、棒に沿った方程式は通常のつり合いの問題になる。この見方をさらに進めると、有効ポテンシャル（effective potential）、コリオリ力（Coriolis force）（こ

の問題では、B が棒に沿って動くとすぐに棒の抗力とつり合う）、そしてつり合いの安定性（stability）といった話題につながる。$x = \frac{4}{3}a$ は安定だろうか？Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、非慣性系（non-inertial frame）と回転する系をまさにこの水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。