解答例

STEP III 1991、第 13 問

力学 ・ 放物体と天井の衝突

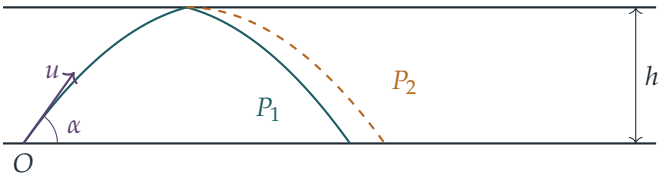
> **STEP III 1991、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q13

鍵となる考え方

天井はなめらか（smooth）なので、水平方向の速度 $u\cos\alpha$ は決して変化せず、どの到達距離も $u\cos\alpha$ に飛行時間を掛けたものにすぎない。仕事はすべて鉛直方向の運動にあり、エネルギーの式（energy equation）から天井における鉛直方向の速さがすぐに得られる。完全弾性衝突（elastic impact）の後、粒子は上昇したときの運動をちょうど逆再生したように落ちてくる。非弾性衝突（inelastic impact）の後は、単に静止状態から落下する。

解答

両方の粒子を、空気抵抗のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点（point mass）としてモデル化する。$u=\sqrt{8gh}$、$s=\sin\alpha$、$c=\cos\alpha$ とおく。O を原点とし、x を水平方向、y を鉛直上向きにとる。



天井に到達する条件

初速度の鉛直成分は us であり、上昇中は

$$\dot{y}^2 = u^2s^2 - 2gy = 8gh\,s^2 - 2gy.$$

が成り立つ。粒子が高さ h に到達するのは、そこで $\dot{y}^2 \geq 0$ となるとき、すなわち $8ghs^2 \geq 2gh$ のときに限られるので、$s^2 \geq \frac{1}{4}$ である。α は鋭角なので $s > 0$ であり、この条件は $\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$、すなわち $\alpha \geq \frac{1}{6}\pi$ となる。（ちょうど $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ のときは、天井にかろうじて触れる。）到達したとき、そこでの上向きの速さは

$$w = \sqrt{8ghs^2 - 2gh} = \sqrt{2gh}\,\sqrt{4s^2 - 1}.$$

である。

P_1 の到達距離

上昇中、鉛直方向の速度は us から w まで一定の割合 g で減少するので、天井に達するまでの時間は

$$t_1 = \frac{us - w}{g}.$$

である。

考えてみよう P_1 が天井から下まで戻ってくるのにかかる時間はどれだけか。

衝突は完全弾性的で天井はなめらかなので、鉛直方向の速度は下向きに w となり、水平方向の速度は変わらない。すると天井から下への鉛直方向の運動は、上昇中の鉛直方向の運動を時間について逆向きにたどったもの（高さ h から床に向かって速さ w で出発し、加速度 g で加速する）になる。したがって、粒子は鉛直方向の速さ us で床に到達し、さらに時間 t_1 を要する。直接確かめると、鉛直方向の速さは w から $\sqrt{w^2 + 2gh} = us$ まで割合 g で増加する。

全飛行時間は $2t_1$ なので、到達距離は

$$\begin{aligned} R_1 &= uc \cdot \frac{2(us - w)}{g} = \frac{2\sqrt{8gh}\,c}{g}\left(2\sqrt{2gh}\,s - \sqrt{2gh}\sqrt{4s^2 - 1}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{8gh}\sqrt{2gh}}{g}\,c(2s - \sqrt{4s^2 - 1}) = 8h\cos\alpha\left(2\sin\alpha - \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right), \end{aligned}$$

となる。ここで $us = \sqrt{8gh}\,s = 2\sqrt{2gh}\,s$ と $\sqrt{8gh}\sqrt{2gh} = 4gh$ を用いた。これが求める到達距離である。

P_2 の到達距離と差 D

P_2 は天井まで同じ経路をたどり、時間 t_1 を要する。衝突は完全非弾性的なので鉛直方向の速度は 0 になり、天井はなめらかなので水平方向の速度は uc のままである。その後、静止状態から高さ h を落下し、時間 $\sqrt{2h/g}$ を要する。よって

$$R_2 = uc\left(t_1 + \sqrt{\tfrac{2h}{g}}\right), \qquad R_2 - R_1 = uc\left(\sqrt{\tfrac{2h}{g}} - t_1\right).$$

である。ここで

$$t_1 = \frac{\sqrt{2gh}\,(2s - \sqrt{4s^2-1})}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,(2s - \sqrt{4s^2-1})$$

であり、$uc\sqrt{2h/g} = \sqrt{8gh}\sqrt{2h/g}\,c = 4hc$ なので

$$R_2 - R_1 = 4h\cos\alpha\Big(1 - 2\sin\alpha + \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\Big).$$

となる。これは $\frac{1}{6}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ で正である。実際、$s > \frac{1}{2}$ のとき $(2s-1)^2 = 4s^2 - 1 - 2(2s-1) < 4s^2 - 1$ であるから、$2s - 1 < \sqrt{4s^2-1}$ となる。したがって P_2 は常により遠くに着地し（弾性的な跳ね返りによって P_1 はより速く下に投げ出される）、

$$D = 4h\cos\alpha\Big(1 - 2\sin\alpha + \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\Big).$$

である。

D の最大化

$\frac{1}{6}\pi \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$ において $f(\alpha) = D/(4h) = c(1-2s) + c\,r$ とおく。ただし $r = \sqrt{4s^2-1}$ である。$f(\frac{1}{6}\pi) = 0$ であり、$\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $f \to 0$（$c \to 0$ のため）、その間では $f > 0$ であることに注意する。$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{4sc}{r}$ を用いて微分すると

$$f'(\alpha) = -s(1-2s) - 2c^2 - sr + \frac{4sc^2}{r}.$$

となる。$c^2 = 1 - s^2$ を代入し、$r > 0$（$\alpha > \frac{1}{6}\pi$ のとき）を掛けると

$$\begin{aligned} rf'(\alpha) &= (4s^2 - s - 2)\,r - sr^2 + 4s(1-s^2) \\ &= (4s^2 - s - 2)\,r - s(8s^2 - 5). \end{aligned}$$

を得る。$\alpha = \frac{1}{4}\pi$ では $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$r = 1$ であり、$(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - 2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(4-5) = 0$ となる。よって $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ は停留点（stationary point）である。

> **考えてみよう** これが他の停留点ではなく最大値を与えることは、どうすればわかるか。

任意の停留点において $(4s^2 - s - 2)r = s(8s^2 - 5)$ が成り立つ。両辺を 2 乗して $r^2 = 4s^2 - 1$ を用い、展開して因数分解すると

$$(4s^2 - s - 2)^2(4s^2 - 1) - s^2(8s^2 - 5)^2 = -2(2s^2 - 1)(8s^3 - s^2 - 2s - 2),$$

となるので、すべての停留点で $s^2 = \frac{1}{2}$ または $q(s) = 8s^3 - s^2 - 2s - 2 = 0$ が成り立つ。$[\frac{1}{2}, 1]$ 上で $q'(s) = 24s^2 - 2s - 2 > 0$ なので q は増加関数であり、$q(0.8) = -0.144 <$

$0 < 0.0985 = q(0.82)$ であるから、この区間における唯一の根は $(0.8, 0.82)$ にある。しかし、そのような s に対しては

$$4s^2 - s - 2 < 4(0.82)^2 - 0.8 - 2 < 0, \qquad 8s^2 - 5 > 8(0.8)^2 - 5 > 0,$$

なので、左辺 $(4s^2 - s - 2)r$ は負、右辺 $s(8s^2 - 5)$ は正となる。つまり、この根は 2 乗したことによって生じたものであり、停留点ではない。よって $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ は $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ における唯一の停留点である。f は連続であり、区間の内部で正、両端で 0 である（または 0 に近づく）から、内部で最大値をとり、それはこの停留点でなければならない。したがって D は $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ のとき最大となり、

$$D_{\max} = 4h \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2} + 1) = 4h(\sqrt{2} - 1).$$

である。

検算

- $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ のとき粒子は天井にかろうじて触れるだけなので、2 つの粒子の結果は一致するはずである。実際 $D = 0$ であり、$R_1 = 8h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,h$ は通常の到達距離 $u^2 \sin 2\alpha / g$ に等しい。
- $h = 1.7\,\mathrm{m}$ として、$\alpha = 1$ で両方の運動を数値的に刻んで計算すると $R_1 \approx 2.420\,\mathrm{m}$、$D \approx 2.464\,\mathrm{m}$ となり、公式と一致する。α について細かく探索すると、$D/(4h)$ の最大値は $\alpha = 0.78540 \approx \frac{1}{4}\pi$ でとられ、その値は $0.41421 \approx \sqrt{2} - 1$ である。

よくある間違い

- $h = ust - \frac{1}{2}gt^2$ を t_1 について解き、大きいほうの根をとってしまう。これは天井がなかった場合に粒子が下降中に高さ h を通過する時刻である。
- $D = R_1 - R_2$ と書いてしまう。これは負である。非弾性衝突をした粒子のほうが遠くに着地する。
- $f'(\frac{1}{4}\pi) = 0$ で止めてしまい、この停留点が最大値を与えることを示さない。

STEP のその先へ

P_1 に対する時間反転の議論は、ある深い事実を初めて垣間見せてくれる。保存力のもとでのニュートン（Newton）の法則は時間を逆向きに進めても同じ形をしており、完全弾性衝突はその対称性を保つが、非弾性衝突（エネルギーを失う）はそれを破る。

反発係数（coefficient of restitution）が 0 と 1 の間にある場合は、ここで求めた 2 つの到達距離の中間を補間することになる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突とエネルギー保存をこの精神で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。