解答例

STEP III 1991、第 12 問

力学 ・ 曲線上の運動

> **STEP III 1991、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q12

鍵となる考え方

質点は楕円（ellipse）に束縛されているので、その位置はただ一つの媒介変数（parameter）θ で完全に記述される。位置ベクトル（position vector）を 2 回微分し、加速度を内向きの単位法線ベクトル（unit normal）に射影する。このとき $\ddot{\theta}$ の項は接線（tangent）方向を向いているので消える。後半では、垂直抗力（normal reaction）が 0 まで減少したときに質点は面から離れる。管はなめらかなので、エネルギー保存（energy conservation）によって各点での速さが求まる。

解答

法線方向の加速度

質点をなめらかな曲線上を動く点としてモデル化する。したがって、はたらく力は鉛直下向きの重力 mg と、管からの垂直抗力 R だけである。

位置は $\mathbf{r} = (a\cos\theta,\, b\sin\theta)$ である。連鎖律（chain rule）を用いて時間で微分すると、

$$\dot{x} = -a\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad \dot{y} = b\cos\theta\,\dot{\theta},$$
$$\ddot{x} = -a\sin\theta\,\ddot{\theta} - a\cos\theta\,\dot{\theta}^2, \qquad \ddot{y} = b\cos\theta\,\ddot{\theta} - b\sin\theta\,\dot{\theta}^2.$$

接線方向は $(-a\sin\theta,\, b\cos\theta)$ であるから、法線方向の一つは $(b\cos\theta,\, a\sin\theta)$ である（両者の内積（dot product）は 0 である）。$\theta = 0$ ではこれは $(b, 0)$ となり、楕円の外側を向く。よって内向きの単位法線ベクトルは

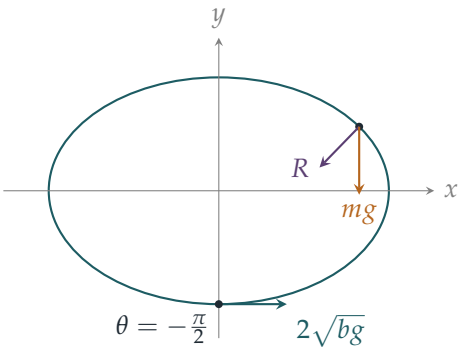
$$\mathbf{n} = -\frac{(b\cos\theta,\, a\sin\theta)}{D}, \qquad D = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}.$$

したがって、内向き法線方向の加速度は

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n} &= -\frac{1}{D}\Big[b\cos\theta(-a\sin\theta\,\ddot{\theta} - a\cos\theta\,\dot{\theta}^2) + a\sin\theta(b\cos\theta\,\ddot{\theta} - b\sin\theta\,\dot{\theta}^2)\Big]\\ &= -\frac{1}{D}\Big[-ab\,\dot{\theta}^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\Big] = \frac{ab\,\dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}},\end{aligned}$$

となる。2 つの $\ddot{\theta}$ の項が打ち消し合うからである。これが求める結果である。

面から離れる点



最下点は $\theta = -\frac{\pi}{2}$ であり、そこでは $y = -b$ である。管はなめらかなので、垂直抗力は仕事をせず、エネルギーは保存される。媒介変数 θ の点での速さを v とすると、

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgb\sin\theta = \tfrac{1}{2}m(4bg) - mgb \quad\Longrightarrow\quad v^2 = 2gb(1-\sin\theta).$$

前半の計算から $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = D^2\dot{\theta}^2$ であるので、$\dot{\theta}^2 = v^2/D^2$ である。

次に、内向き法線 $\mathbf{n}$ の方向に力を分解する。垂直抗力 R は $\mathbf{n}$ の方向にはたらく（質点は内側にあるので、接触している間は管が内向きに押し、$R \geq 0$ である）。重力は $(0,-mg)$ であり、その $\mathbf{n}$ 方向の成分は $(0,-mg)\cdot\mathbf{n} = mga\sin\theta/D$ である。ニュートン（Newton）の第二法則より

$$R + \frac{mga\sin\theta}{D} = \frac{m\,ab\,\dot{\theta}^2}{D} = \frac{m\,ab\,v^2}{D^3}, \qquad \text{よって} \qquad R = \frac{ma}{D^3}\Big(bv^2 - g\sin\theta\,D^2\Big).$$

考えてみよう 重力の成分が負の符号ではなく $+mga\sin\theta/D$ となるのはなぜか。

上半分（$\sin\theta > 0$）では、内向き法線は下向きの成分をもつ。したがってそこでは、鉛直面内の円運動の最高点と同じように、重力が質点を内側へ引く助けとなる。R と重力のこの成分の両方が、向心加速度（centripetal acceleration）をもたらすのである。

ここで $a = \frac{3}{2}b$、$v^2 = 2gb(1-\sin\theta)$ とし、$s = \sin\theta$ とおく。すると

$$D^2 = \tfrac{9}{4}b^2s^2 + b^2(1-s^2) = b^2(1+\tfrac{5}{4}s^2),$$

であるから、

$$bv^2 - g\sin\theta\, D^2 = gb^2\left[2(1-s) - s(1+\tfrac{5}{4}s^2)\right] = -\tfrac{1}{4}gb^2(5s^3+12s-8).$$

$ma/D^3 > 0$ であるから、R の符号は $-(5s^3+12s-8)$ の符号と一致する。

質点は R が初めて 0 になる点で面から離れる。関数 $p(s) = 5s^3+12s-8$ は $p'(s) = 15s^2+12 > 0$ より狭義単調増加（strictly increasing）であり、$p(-1) = -25 < 0$、$p(1) = 9 > 0$ である。よって p は $(-1,1)$ にちょうど一つの根をもつ。質点が最下点から上昇するにつれて s は -1 から増加し、s がその根に達するまでは $R > 0$ である。また、すべての $s < 1$ に対して $v^2 = 2gb(1-s) > 0$ であるから、質点はその点に達したときもまだ管を上向きに動いている。したがって、R が初めて 0 になり、質点が面から離れるのは

$$5\sin^3\theta + 12\sin\theta - 8 = 0,$$

を満たす点であり、これが求めるものである。数値的には $\sin\theta \approx 0.584$ であり、質点は長軸の高さより少し上で面から離れる。

検算

- $a = b = r$ とすると、法線方向の加速度は $r\dot{\theta}^2 = v^2/r$ となり、よく知られた円運動の結果に一致する。
- 最下点では $v^2 = 4bg$ のもとで $R = m\left(\frac{bv^2}{a^2} + g\right)$ となり、これは正である（そこでの曲率半径（radius of curvature）は a^2/b である）。$p(-1) = -25 < 0$ もこれと整合する。
- $b = 1$、$a = 1.5$、$g = 9.81$ として、θ に関する運動方程式（equation of motion）を最下点から逐次的に数値積分した。垂直抗力は $\sin\theta \approx 0.58379$ で初めて 0 になり、三次方程式（cubic）の根 0.58377 と一致した（$\theta \approx 35.7^\circ$）。

よくある間違い

- θ を極角（polar angle）とみなしてしまうこと。$a = b$ でない限り、点 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ は x 軸から角 θ の位置にはなく、法線も動径の方向ではない。
- 法線方向の加速度として v^2/b や v^2/a を用いること。楕円上では曲率半径は点ごとに変化し、それこそが前半で計算している内容である。

- 重力の法線成分の符号を誤ること。そうすると三次式が $5s^3 - 4s + \ldots$ となり、意味のある根が得られない。

STEP のその先へ

前半の結果は、ρ を曲率半径とする法線加速度の公式 v^2/ρ の特別な場合である。実際、この楕円では $\rho = D^3/(ab)$ である。加速度を接線成分と法線成分に分解すること（フレネ標構（Frenet frame））は、大学 1 年次の力学や微分幾何学（differential geometry）で標準的に扱われる。束縛を一つの座標 θ で扱う考え方は、自然にラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）へとつながる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、束縛運動や極座標（polar coordinates）、内在座標（intrinsic coordinates）をよく解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。