解答例

STEP III 1991、第 11 問

力学 ・ 剛体のつり合い

STEP III 1991、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

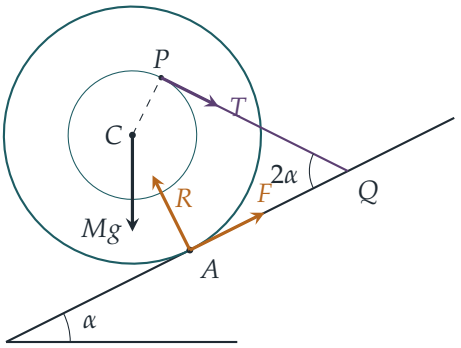
step.maths.org/questions/91-s3-q11

鍵となる考え方

円柱は 4 つの力、すなわち重力、垂直抗力（normal reaction）、接点での摩擦力（friction）、糸の張力（tension）を受けて釣り合っている（equilibrium）剛体（rigid body）である。このうち重力と垂直抗力の 2 つは円柱の中心を通るので、中心のまわりのモーメント（moment）を考えれば、摩擦力と張力が直接結びつく。次に斜面に平行な方向と垂直な方向に力を分解すると摩擦力と垂直抗力が求まり、あとは不等式 $F \leq \mu R$ を使えばよい。後半では、糸の先を何が支えているかは円柱には関係ないので、張力は変わらず、質点だけを調べればよい。

解答

円柱は一様な剛体で、その重心（centre of mass）は中心 C にあるものとし、糸は軽く伸び縮みしないもの、もう一方の物体は質点（particle）とみなす。斜面との接点を A、糸の張力を T とする。糸は溝に巻きつけられているので、糸の巻かれていない部分 PQ は P で溝に接し、その作用線（line of action）は C からの垂直距離が a である。図より、Q は A よりも斜面の上方にあり、糸は円柱を P から Q の向きに引く。すなわち斜面に沿って上向き、かつ斜面に押しつける向きで、斜面となす角は 2α である。



破線で示した半径 CP の長さは a で、糸に垂直である。円柱にはたらく摩擦力を F とし、斜面に沿って上向きを正とする。

円柱：$\mu \geq \frac{1}{3}\tan\alpha$ を示す

C のまわりのモーメント。重力は C にはたらき、垂直抗力は AC に沿ってはたらくので、どちらも C のまわりのモーメントをもたない。摩擦力は C から距離 $2a$ の点にはたらき、張力の作用線までの垂直距離は a であり、両者は円柱を逆向きに回そうとするので、

$$F \cdot 2a = T \cdot a, \qquad \text{すなわち、} \qquad T = 2F.$$

考えてみよう 摩擦力と張力が円柱を逆向きに回そうとするのはなぜか。

この 2 つは C のまわりのモーメントをもつ唯一の力なので、それらのモーメントは打ち消し合わなければならない。糸が P を引く力だけがはたらけば、円柱は斜面を転がり上がる向きに回る。A で斜面に沿って上向きにはたらく摩擦力は、それと逆向きに回そうとする。もし摩擦力の向きを誤って仮定していたとしても、以下の式から $F < 0$ が得られるだけなので、この符号は余分な仮定ではない。

斜面に平行な方向の力の釣り合い（斜面に沿って上向きを正とする）：

$$F + T\cos 2\alpha = Mg\sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad F(1 + 2\cos 2\alpha) = Mg\sin\alpha.$$

斜面に垂直な方向の力の釣り合い：張力は斜面に押しつける向きに成分 $T\sin 2\alpha$ をもつので、

$$R = Mg\cos\alpha + T\sin 2\alpha = Mg\cos\alpha + 2F\sin 2\alpha.$$

$F = Mg\sin\alpha/(1 + 2\cos 2\alpha)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} R(1 + 2\cos 2\alpha) &= Mg(\cos\alpha + 2\cos 2\alpha\cos\alpha + 2\sin 2\alpha\sin\alpha) \\ &= Mg(\cos\alpha + 2\cos(2\alpha - \alpha)) = 3Mg\cos\alpha. \end{aligned}$$

よって

$$F = \frac{Mg\sin\alpha}{1+2\cos 2\alpha}, \qquad R = \frac{3Mg\cos\alpha}{1+2\cos 2\alpha}.$$

円柱は斜面から離れないので $R > 0$ である。α は鋭角なので $\cos\alpha > 0$ であり、したがって $1+2\cos 2\alpha > 0$ となるから、$F > 0$ でもある。割り算をすると

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha} = \tfrac{1}{3}\tan\alpha.$$

釣り合っているためには摩擦力が $F \le \mu R$ を満たさなければならないので、$\mu \ge F/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$ となり、示すべきことが示された。

質点：摩擦係数の最小値

糸の位置は変わらないので、円柱はまったく同じ位置にあり、その 3 つの式も変わらない。特に、張力は依然として

$$T = 2F = \frac{2Mg\sin\alpha}{1+2\cos 2\alpha}.$$

である。$\tan\alpha = \frac{1}{2}$ のとき $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$、$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ なので、

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{3}{5}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{5},$$

であり、$1+2\cos 2\alpha = \frac{11}{5}$ となる。したがって

$$T = \frac{2Mg}{\sqrt{5}}\cdot\frac{5}{11} = \frac{2\sqrt{5}}{11}Mg.$$

（円柱については $\mu \ge \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ も必要である。）

次に Q にある質点を考える。糸は質点を P の向きに引く。すなわち、斜面に沿って**下向き**に成分 $T\cos 2\alpha$、斜面から**離れる向き**に成分 $T\sin 2\alpha$ をもつ。重力 $3Mg$ も斜面に沿って下向きの成分をもつので、質点にはたらく摩擦力 F' は斜面に沿って上向きでなければならない。質点にはたらく垂直抗力を R' とする。

斜面に平行な方向：

$$F' = 3Mg\sin\alpha + T\cos 2\alpha = \frac{3Mg}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{11}Mg = \frac{33\sqrt{5}}{55}Mg + \frac{6\sqrt{5}}{55}Mg = \frac{39\sqrt{5}}{55}Mg.$$

斜面に垂直な方向：

$$R' = 3Mg\cos\alpha - T\sin 2\alpha = \frac{6Mg}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{11}Mg = \frac{66\sqrt{5}}{55}Mg - \frac{8\sqrt{5}}{55}Mg = \frac{58\sqrt{5}}{55}Mg.$$

これは正なので、質点は確かに斜面から離れない。釣り合いには $F' \le \mu' R'$ が必要である。ここで μ' は質点と斜面の間の摩擦係数（coefficient of friction）である。よって

$$\mu' \ge \frac{F'}{R'} = \frac{39}{58}.$$

摩擦係数の最小値は $\dfrac{39}{58}$ である。

検算

- 代わりに A のまわりのモーメントを考えると $T\,a(1+2\cos 2\alpha) = 2a\,Mg\sin\alpha$ となり、同じ張力が得られる。（A から糸までの垂直距離は $a+2a\cos 2\alpha$ である。）
- $\alpha \to 0$ のとき斜面は水平になり、張力も摩擦力も 0 になり、下限 $\frac{1}{3}\tan\alpha \to 0$ となる。これは当然そうなるべき結果である。
- 数値による検算として、60° 未満の鋭角 α を無作為に 10 000 個とり、座標から図形を構成して釣り合いの式を解いたところ、$F/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$ が確認された。$\tan\alpha = \frac{1}{2}$ のときは $T \approx 0.4066\,Mg$、$F' \approx 1.5856\,Mg$、$R' \approx 2.3580\,Mg$、$F'/R' \approx 0.67241 = 39/58$ となる。

よくある間違い

- 張力が円柱を斜面に**押しつける**向きにはたらき、R を増やすことを忘れる。$T\sin 2\alpha$ を落とすと比が誤ったものになる。
- 糸が質点を引く向きを誤る。糸は質点を P の向きに引くので、質点にはたらく垂直抗力を**減らし**、斜面に沿って下向きの力を増やす。
- 後半で張力を一から計算し直す。円柱の釣り合いは変わっていないので、T も変わらない。

STEP のその先へ

剛体の静力学（statics）は、結局 2 つのベクトル方程式に帰着する。すなわち、力の総和が 0 であることと、**任意の**点のまわりのモーメントの総和が 0 であることである。その点をうまく選ぶこと、ここでは未知の力が 2 つ通る中心を選ぶことが、最も重要な技術である。大学では、これは力の系とそれと等価な「レンチ」（wrench）の研究へと発展する。また摩擦の問題は、釣り合いが**どのように**崩れるのか、すなわち滑るのか、転がるのか、倒れるのかという問いにもつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学と回転を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。