解答例

# STEP III 1991、第 10 問

純粋数学 ・ ニュートンの恒等式

> **STEP III 1991、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q10

## 鍵となる考え方

この多項式（polynomial）は o でない係数（coefficient）を三つしかもたないので、基本対称式（elementary symmetric functions）$\Sigma_m$ のほとんどすべてが o となり、与えられた恒等式（ニュートン（Newton）の恒等式（Newton's identity））は二項の漸化式（recurrence）に帰着する。次数 $n$ を超えるとこの恒等式はもはや使えないが、さらに単純なものが使える。すなわち、どの根（root）も方程式そのものを満たすので、それに $\alpha^k$ を掛けて根全体にわたって和をとれば、$S_{n+k}$ をそれ以前の冪和（power sum）と結びつけることができる。

## 解答

### $S_{n-1}$ までの冪和

$x^n - qx^{n-1} + r$ と $\prod_i (x - \alpha_i) = x^n - \Sigma_1 x^{n-1} + \Sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \Sigma_n$ を比較すると、次が読み取れる。

$$\Sigma_1 = q, \qquad \Sigma_2 = \Sigma_3 = \cdots = \Sigma_{n-1} = 0, \qquad (-1)^n \Sigma_n = r.$$

与えられた恒等式で $1 \le p \le n-1$ とする。$p \le n-1$ であるから、$\Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ を含む項はすべて o となる。（$p = 1$ のとき、恒等式は単に $S_1 - \Sigma_1 = 0$ である。）残るのは

$$S_p - q\,S_{p-1} = 0 \quad (2 \le p \le n-1), \qquad S_1 = q.$$

である。よって $S_1 = q$ であり、各冪和は一つ前の冪和の $q$ 倍である。$p$ に関する数学的帰納法（induction）により、

$$S_p = q^p \qquad \text{ただし} 1 \le p \le n-1,$$

が示された。各 $\alpha_i^0 = 1$ であるから、$S_0 = n$ であることも記しておくと便利である。

### $S_n$、$S_{n+1}$ および $S_{n+2}$

$p = n$ のときも恒等式はまだ使え、今度は最後の項が現れる。

$$S_n - q\,S_{n-1} + (-1)^n n\,\Sigma_n = 0.$$

$(-1)^n\Sigma_n = r$ であるから、

$$S_n = q \cdot q^{n-1} - nr = q^n - nr.$$

を得る。

> **考えてみよう** 与えられた恒等式は $p = n$ で終わっている。その先へはどうやって進めばよいだろうか。

方程式そのものを用いる。各根は $\alpha_i^n = q\alpha_i^{n-1} - r$ を満たす。これに $\alpha_i^k$（ただし $k \geq 0$）を掛けて $i$ について和をとると、

$$S_{n+k} = q\,S_{n+k-1} - r\,S_k \qquad (k \geq 0). \tag{$*$}$$

を得る。$k = 0$ とすると再び $S_n = q^n - nr$ が得られ、心強い検算となる。さて、

$$S_{n+1} = q\,S_n - r\,S_1 = q^{n+1} - nqr - qr = q^{n+1} - (n+1)qr,$$
$$S_{n+2} = q\,S_{n+1} - r\,S_2 = q^{n+2} - (n+1)q^2r - q^2r = q^{n+2} - (n+2)q^2r.$$

ここで $S_1 = q$ と $S_2 = q^2$ を用いた。これらが成り立つのは、$n \geq 5$ により $2 \leq n-1$ となるからである。

### 一般の公式

$S_n = q^n - nr$、$S_{n+1} = q^{n+1} - (n+1)qr$、$S_{n+2} = q^{n+2} - (n+2)q^2r$ というパターンから、次が予想される。

$$S_{n+m} = q^{n+m} - (n+m)\,q^m r \qquad \text{ただし} 0 \leq m \leq n-1.$$

これを $m$ に関する帰納法で証明する。$m = 0$ の場合は上で示した $S_n = q^n - nr$ である。

$1 \leq m \leq n-1$ として、公式がある $m-1$ に対して成り立つと仮定する。$k = m$ として $(*)$ を用いると、

$$\begin{aligned} S_{n+m} &= q\,S_{n+m-1} - r\,S_m \\ &= q(q^{n+m-1} - (n+m-1)q^{m-1}r) - r\,q^m \\ &= q^{n+m} - (n+m)\,q^m r, \end{aligned}$$

となる。ここで $S_m = q^m$ を用いたが、これは $1 \le m \le n-1$ であるから成り立つ。これは $m$ に対する公式である。帰納法により、公式はすべての $0 \le m \le n-1$、すなわち $m < n$ に対して成り立つ。

**考えてみよう** 条件 $m < n$ は正確にはどこで効いてくるのだろうか。

$S_m = q^m$ を用いる段階だけである。$m = n$ では $S_n$ が必要になるが、それは $q^n$ ではなく $q^n - nr$ であるから、余分な $-nr$ が入り込んでパターンが崩れる。実際、$(*)$ から $S_{2n} = q^{2n} - 2nq^n r + nr^2$ が得られる。

## 検算

- $r = 0$ のとき、方程式は $x^{n-1}(x-q) = 0$ となり、根は $q$ と $0$（$n-1$ 重）であるから、すべての $S_k = q^k$ である。ここで得た公式はすべてこれに帰着する。
- $q = 0$ のとき、根は $-r$ の $n$ 乗根である。このとき $1 \le p \le n-1$ に対して $S_p = 0$ であり、$S_n = n \cdot (-r) = -nr$ となって $q^n - nr$ と一致する。
- 数値的に、ランダムな $q, r$ と $5 \le n \le 9$ に対してすべての根を求め、その冪の和を計算した。$S_p = q^p$ および $S_{n+m}$ の公式（$0 \le m \le n-1$）は約 $10^{-12}$ の精度で一致したが、$m = n$ では公式は目に見えて成り立たなくなった。

## よくある間違い

- 恒等式の最後の項にある因子 $p$ を忘れ、$q^n - nr$ ではなく $S_n = q^n - r$ としてしまう。
- $\Sigma_n$ の符号を誤る。定数項は $(-1)^n \Sigma_n$ であるから、$n$ の偶奇（parity）にかかわらず $(-1)^n n\Sigma_n = nr$ である。
- 与えられた恒等式を $p > n$ で適用してしまう。そこでは、述べられた形のままでは成り立たない。

## STEP のその先へ

これらはニュートンの恒等式であり、$(*)$ は、冪和が元の方程式を特性多項式（characteristic polynomial）とする線形漸化式（linear recurrence）を満たすことを示している。行列の言葉でいえば、$S_k$ は $A^k$ のトレース（trace）である。ここで $A$ はこの多項式のコンパニオン行列（companion matrix）である。根に関する任意の対称式が $\Sigma_m$ を用いて表せるという事実は対称式の基本定理（fundamental theorem of

symmetric polynomials）であり、ガロア（Galois）理論へとつながっていく。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）は、この代数が展開されていく様子を見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。