解答例

STEP III 1991、第 1 問

純粋数学 ・ 級数と展開

> **STEP III 1991、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q1

鍵となる考え方

三つの小問はいずれも、力ずくで計算を始める前に少し考えると報われる。(i) では、部分分数分解（partial fractions）によって和が次々と打ち消し合う望遠鏡和（telescoping sum）の形になる。(ii) では、3 次式 $1+x+x^2+x^3$ は等比級数（geometric series）なので、二つのごく簡単な式の商として表せ、対数は二つの標準的な級数に分かれる。(iii) では、まず指数部分を級数で表す。それは x^2 から始まるので、指数関数の級数のうち x^4 まで届く項はわずかしかない。

解答

小問 (i)

次を満たす定数を求める。

$$\frac{6}{r(r+1)(r+3)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r+1} + \frac{C}{r+3}.$$

隠蔽法（cover-up rule）により、$A = \dfrac{6}{1\cdot 3} = 2$、$B = \dfrac{6}{(-1)(2)} = -3$、$C = \dfrac{6}{(-3)(-2)} = 1$ である。（簡単な検算として $A+B+C=0$ となるが、左辺は r が大きいとき $6/r^3$ のように振る舞い、$1/r$ の項をもたないので、これは当然である。）

係数 $2, -3, 1$ の和は 0 であるから、これを $2-2$ と $-1+1$ に分けることが思いつく。

$$\frac{6}{r(r+1)(r+3)} = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) - \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+3}\right).$$

これでそれぞれの括弧が望遠鏡和になる。一つ目は

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

を与える。二つ目では項が二つずつずれているので、両端にそれぞれ二つの項が残る。

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

これらを合わせると、

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}\frac{6}{r(r+1)(r+3)}&=2-\frac{2}{n+1}-\frac{5}{6}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\\&=\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}.\end{aligned}$$

小問 (ii)

? **考えてみよう** $1+x+x^2+x^3$ をもっとすっきり書く方法はないだろうか。

これは公比 x の等比級数であるから、$x\neq 1$ のとき

$$1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}.$$

である。$|x|<1$ のとき $1-x^4$ と $1-x$ はともに正であるから、対数を分けることができる。

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln(1-x^4)-\ln(1-x).$$

$|y|<1$ で成り立つ $\ln(1-y)=-\sum_{k\geq 1}y^k/k$ を用いると（ここでは $|x^4|<1$ も成り立つ）、

$$-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k},\qquad \ln(1-x^4)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{4m}}{m}.$$

二つ目の級数に現れるのは、k が 4 の倍数であるようなべき x^k だけである。そのような $k=4m$ に対して、合わせた係数は

$$\frac{1}{4m}-\frac{1}{m}=-\frac{3}{4m}=-\frac{3}{k}.$$

となる。よって

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots,$$

であり、一般項は

$$\frac{x^k}{k}\ \ 4\nmid k\text{ のとき},\qquad -\frac{3x^k}{k}\ \ 4\mid k\text{ のとき}.$$

である。どの係数も o でないので、上に示した五つの項が最初の五つの o でない項である。

小問 (iii)

$-1 < x \leq 1$ のとき $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ であるから、

$$u = x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \cdots .$$

? **考えてみよう** $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \cdots$ の項はいくつ必要だろうか。

u は x^2 から始まるので、項 u^k は x^{2k} から始まる。したがって u^3 以降は x^4 までには何も寄与せず、u^2 からはその最低次の項 x^4 だけが必要である。よって

$$\begin{aligned} e^{x\ln(1+x)} &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{2}x^4 + \cdots \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + \cdots . \end{aligned}$$

(もちろん $e^{x\ln(1+x)}$ は $(1+x)^x$ にほかならない。)

検算

- (i) で $n = 1$ とすると $\frac{7}{6} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ となり、ただ一つの項 $\frac{6}{1\cdot 2\cdot 4}$ と一致する。$n \to \infty$ とすると、無限和 $\frac{7}{6}$ が得られる。
- (ii) で、$y = x + x^2 + \cdots$ として $\ln(1+y) \approx y - \frac{y^2}{2}$ と 2 次まで直接展開すると $x + x^2 - \frac{x^2}{2} = x + \frac{x^2}{2}$ となり、得られた最初の二項と一致する。数値的にも、$x = 0.5$ において級数を多くの項まで足すと $\ln 1.875 \approx 0.6286$ と一致する。
- (iii) で、$x = 0.01$ における展開と $(1.01)^{0.01}$ との差はおよそ 7.4×10^{-11} であり、これは当然そうあるべきように x^5 の大きさである（次の係数は $-\frac{3}{4}$ であることがわかる)。

よくある間違い

- (i) で、二つずれた望遠鏡和では両端に一つではなく二つずつ項が残ることを忘れる。
- (ii) で、x^4 の係数を $\frac{1}{4} - 1$ と正しく求めながら、一般項を $(-1)^{k+1}x^k/k$ などと書いてしまう。規則性は k を 4 で割った余りによって決まる。
- (iii) で、$\frac{1}{2}u^2$ の項を落とす。この項は $\frac{1}{2}x^4$ を寄与する。

STEP のその先へ

小問 (iii) はべき級数（power series）の合成のささやかな例であり、各項の最低次のべきを追跡するという帳簿づけの工夫は、大学で漸近展開（asymptotic expansion）を扱う方法そのものである。べき級数がいつ収束するのか、また収束半径（radius of convergence）の内側ではなぜ自由に足したり掛けたり合成したりできるのか、という問題は、解析学（analysis）の最初の講義の主題である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）はこれらを明快に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。