解答例

STEP II 1991、第 8 問

純粋数学 • 非線形 1 階常微分方程式

> **STEP II 1991、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q8

鍵となる考え方

どちらの微分方程式も $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ についての 2 次方程式であるから、まず導関数（derivative）について代数的に解き、そのあとで積分すればよい。それぞれの 2 次方程式は 2 つの解をもつので、1 階の方程式の候補が 2 つ得られ、$x = 0$ における条件によってどちらの分枝（branch）が許されるかが決まる。双曲線関数（hyperbolic function）の恒等式、とりわけ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ と半角の公式を使うと、解がすっきりした形になる。

解答

2 次方程式

解の公式により、

$$u = \frac{-2\sinh x \pm \sqrt{4\sinh^2 x + 4}}{2} = -\sinh x \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1} = -\sinh x \pm \cosh x,$$

となる。ここで $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ と $\cosh x > 0$ を用いた。$\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$ かつ $\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^{x}$ であるから、2 つの解は

$$u = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{または} \qquad u = -\mathrm{e}^{x}.$$

である。（検算：解の積は -1、和は $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x} = -2\sinh x$ であり、確かにそうなるべき値になっている。）

1 つ目の微分方程式

$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ とおけば、これはちょうど上の 2 次方程式であるから、各 x において $y' = \mathrm{e}^{-x}$ または $y' = -\mathrm{e}^{x}$ のいずれかが成り立つ。

> **考えてみよう** y' が、ある x の値では一方の解に従い、別のところではもう一方の解に従うということはありうるだろうか？

ありえない。1 つ目の解はつねに正、2 つ目の解はつねに負であるから、両者が一致することはない。導関数は中間値の性質（intermediate value property）をもつ（ダルブー（Darboux）の定理。y' が連続であると仮定するなら、通常の中間値の定理でよい）。したがって y' は 0 を通らずに正の値から負の値へ跳ぶことはできないが、どちらの解もその値をとらない。よって y' は全域で一方の解にとどまる。

$x = 0$ において解は 1 と -1 であり、$y' > 0$ が必要であるから、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x}$ である。積分すると $y = -\mathrm{e}^{-x} + c$ となり、$x = 0$ で $y = 0$ であることから $c = 1$ を得る：

$$\boxed{y = 1 - \mathrm{e}^{-x}}$$

2 つ目の微分方程式

$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ とおくと、$p^2 \sinh x + 2p - \sinh x = 0$ である。

$x = 0$ のとき、$\sinh 0 = 0$ であり、方程式は $2p = 0$ に帰着するので、$y'(0) = 0$ でなければならない。

$x \neq 0$ のとき、$\sinh x \neq 0$ であり、解の公式により

$$p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\sinh^2 x}}{2\sinh x} = \frac{-1 \pm \cosh x}{\sinh x}.$$

を得る。$\cosh x = 1 + 2\sinh^2 \frac{x}{2} = 2\cosh^2 \frac{x}{2} - 1$ および $\sinh x = 2\sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}$ を用いると、2 つの解は次のように簡単になる：

$$\frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{2\sinh^2 \frac{x}{2}}{2\sinh \frac{x}{2}\cosh \frac{x}{2}} = \tanh \tfrac{x}{2},$$

$$\frac{-1 - \cosh x}{\sinh x} = -\frac{2\cosh^2 \frac{x}{2}}{2\sinh \frac{x}{2}\cosh \frac{x}{2}} = -\coth \tfrac{x}{2}.$$

分枝の選択。 2 つ目の解 $-\coth \frac{x}{2}$ は $x \to 0$ のとき有界でなく、これを積分すると $y = -2\ln|\sinh \frac{x}{2}| + c$ となり、どちらの側から $x \to 0$ としても $+\infty$ に発散する。したがって原点のどちらの側でも、この分枝から $x = 0$ で連続かつ $y(0) = 0$ を満たす解を得ることはできない。ゆえに $x = 0$ の近くでは（それぞれの側で）1 つ目の解をとらなければならず、$\tanh 0 = 0$ であるから、これは $y'(0) = 0$ と整合する。2 つの解が一致

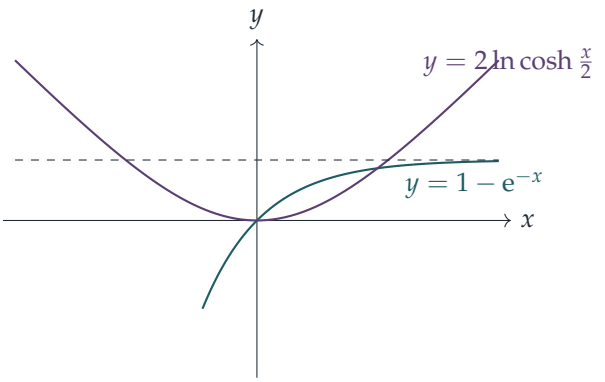
することはない（一方は x と同符号、他方は逆符号であり、$x \neq 0$ ではどちらも 0 にならない）。よって先ほどと同じ中間値の議論により、解はすべての x でこの分枝にとどまる：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tanh\tfrac{x}{2} \quad \text{すべての} x.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sinh\frac{x}{2}$ であるから、$\tanh\frac{x}{2} = 2\cdot\dfrac{\frac{1}{2}\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}}$ となり、これは $2f'/f$ の形である。よって積分すると $y = 2\ln\cosh\frac{x}{2} + c$ を得る（$\cosh > 0$ であるから絶対値は不要である）。条件 $y(0) = 0$ から $c = 0$ となるので、

$$\boxed{y = 2\ln\cosh\tfrac{x}{2} = \ln\left(\frac{1+\cosh x}{2}\right)}$$

である。2 つ目の形は $2\cosh^2\frac{x}{2} = 1 + \cosh x$ から従う。



検算

- $y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ について：$y'^2 + 2y'\sinh x = \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) = 1$ であり、要求どおりである。また $y'(0) = 1 > 0$ である。
- $y = 2\ln\cosh\frac{x}{2}$ について、$t = \tanh\frac{x}{2}$ とおくと $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$ であり、$\sinh x\,(t^2 - 1) + 2t = -2t + 2t = 0$ となる。方程式は $x \mapsto -x, y \mapsto y$ で不変であるから、解は偶関数になるはずであり、実際そうなっている。
- 数値的には、$x = 1$ における解の値は $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0.6321$ と $2\ln\cosh\frac{1}{2} \approx 0.2402$ である。多数のランダムな点で差分による導関数を代入すると、どちらの方程式も 10^{-6} 以内の精度で満たされる。

よくある間違い

- 2 つ目の方程式を $\sinh x$ で割るとき、それが $x = 0$ で 0 になることに気づかないこと。そこはまさに初期条件（initial condition）が課される場所であり、もとの方程式から $y'(0) = 0$ が強制される。
- 後半で両方の分枝を残してしまうこと。$-\coth \frac{x}{2}$ の分枝は、その積分が原点で発散するため、$y(0) = 0$ を満たすことができない。

STEP のその先へ

$F(x, y, y') = 0$ のように y' について線形でない方程式は、1 点を通る解を複数もったり、どの単一の分枝でも記述できない「特異解（singular solution）」をもったりすることがある。そのため、解の存在と一意性の定理（ピカール–リンデレフ（Picard–Lindelöf）の定理）は、すでに $y' = f(x, y)$ の形に解かれた方程式について述べられる。今回は解が互いに離れていたので、各分枝は素直に振る舞った。判別式が 0 になりうる場合には、分枝どうしをつなぎ合わせることができ、一意性が成り立たなくなる。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、存在と一意性、そしてこうした非線形の 1 階方程式が論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。