解答例

STEP II 1991、第 7 問

純粋数学 ・ 関数方程式

> **STEP II 1991、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q7

鍵となる考え方

関数方程式（functional equation）は**すべての** x と y に対して成り立つので、一方の変数を固定したまま、もう一方の変数について微分してよい。こうすると、関数方程式は 2 つの異なる点における g' を結びつける微分方程式（differential equation）に変わる。そこで一方の変数をうまく選べば、g' がいたるところで決まり、あとは積分すれば完成である。以下では、問題文のとおり g と f は微分可能であると仮定する。

解答

導関数の関係式

$y > 0$ を固定し、$\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(y) = \mathrm{g}(z)$ の両辺を x について微分する。このとき $\mathrm{g}(y)$ は定数なので、合成関数の微分法（chain rule）により

$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{g}'(z)\,\frac{\partial z}{\partial x}.$$

商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x+y+1) - xy}{(x+y+1)^2} = \frac{y^2+y}{(x+y+1)^2},$$

であり、これが 1 つ目の形である。2 つ目の形については、$z+1$ がきれいに因数分解できることに注目する：

$$z+1 = \frac{xy+x+y+1}{x+y+1} = \frac{(x+1)(y+1)}{x+y+1}, \qquad \text{よって} \qquad z(z+1) = \frac{xy(x+1)(y+1)}{(x+y+1)^2}.$$

これを $x(x+1)$ で割るとちょうど $\dfrac{y(y+1)}{(x+y+1)^2}$ になるので、

$$g'(x) = \frac{y^2+y}{(x+y+1)^2}\,g'(z) = \frac{z(z+1)}{x(x+1)}\,g'(z),$$

となり、示すべき式が得られた。これを対称な形

$$x(x+1)\,g'(x) = z(z+1)\,g'(z). \qquad (\dagger)$$

に書いておくと便利である。

$2g'(1) = (u^2+u)g'(u)$ を導く

> **考えてみよう** $(0,1)$ 内のすべての u についての主張が欲しい。どの変数を、どの値に固定すればよいだろうか。

$(\dagger)$ で $x = 1$ とおくと、左辺は $2g'(1)$ となり、$z = \dfrac{y}{y+2}$ である。y が $(0,\infty)$ 全体を動くとき、$\dfrac{y}{y+2} = 1 - \dfrac{2}{y+2}$ は 0 から 1 に向かって連続的に増加するので、$0 < u < 1$ を満たすすべての値 u をとる（具体的には $y = \frac{2u}{1-u}$）。したがって

$$2g'(1) = (u^2+u)\,g'(u) \qquad \text{任意の} 0 < u < 1.$$

積分する

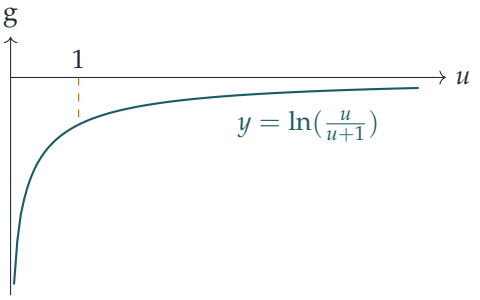
定数 $A = 2g'(1)$ とおく。すると $0 < u < 1$ に対して、部分分数分解（partial fractions）を用いて

$$g'(u) = \frac{A}{u(u+1)} = A\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right),$$

であり、これを積分すると（すべて正なので絶対値記号は不要である）

$$g(u) = A(\ln u - \ln(u+1)) + B = A\ln\left(\frac{u}{u+1}\right) + B.$$

実はこの式は $u < 1$ だけでなく、**すべての** $u > 0$ に対して成り立つ。x を固定すると、y が 0 から ∞ まで動くとき $z = \dfrac{xy}{x+y+1}$ は 0 から x に向かって増加するので、$z < 1$ となるように y を選べる。すると $(\dagger)$ と上の結果から $x(x+1)g'(x) = z(z+1)g'(z) = A$ が得られる。よって同じ積分が $(0,\infty)$ 全体で通用し、$(0,\infty)$ は区間なので定数 B は 1 つで済む。



(図の曲線は $A = 1$、$B = 0$ の場合である。負の値をとり、増加し、$u \to \infty$ のとき 0 に近づく。)

$(*)$ の確認と B の決定

$\mathrm{g}(u) = A \ln \frac{u}{u+1} + B$ を代入する。$(*)$ の左辺は

$$\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(y) = A \ln \frac{xy}{(x+1)(y+1)} + 2B.$$

右辺については、先に求めた $z+1$ の因数分解から

$$\frac{z}{z+1} = \frac{xy}{x+y+1} \cdot \frac{x+y+1}{(x+1)(y+1)} = \frac{xy}{(x+1)(y+1)},$$

となるので、

$$\mathrm{g}(z) = A \ln \frac{xy}{(x+1)(y+1)} + B.$$

両辺がすべての $x, y > 0$ で一致するための必要十分条件は $2B = B$、すなわち $B = 0$ である。よって $\mathrm{g}(u) = A \ln \dfrac{u}{u+1}$ は $(*)$ を満たす。

A は決定できるか

できない。上の確認は $A = 0$（零関数）も含め、**どんな** A の値に対しても成り立つ。定義 $A = 2\mathrm{g}'(1)$ も役に立たない。実際、ここで得た解では $\mathrm{g}'(1) = A(1 - \frac{1}{2}) = \frac{A}{2}$ なので、$A = 2\mathrm{g}'(1)$ は自動的に成り立ち、新しい情報を何も与えない。方程式 $(*)$ は g について線形（linear）なので、解の定数倍もまた解であり、A はその倍率にすぎない。

関数 f

同じ方法が使える。$y > 0$ を固定し、$\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(xy)$ を x について微分すると

$$\mathrm{f}'(x) = y\,\mathrm{f}'(xy).$$

考えてみよう ここで $x = 1$ とおくことに相当するのは何だろうか。

$x = 1$ とおくと、すべての $y > 0$ に対して $f'(1) = y f'(y)$ が得られるので、$C = f'(1)$ とおけば

$$f'(y) = \frac{C}{y} \qquad \Longrightarrow \qquad f(y) = C \ln y + D \quad (y > 0).$$

これを元の式に代入すると、$f(x) + f(y) = C \ln(xy) + 2D$ である一方 $f(xy) = C \ln(xy) + D$ なので、$D = 0$ となる。（同じことだが、方程式で $x = y = 1$ とおくと $2f(1) = f(1)$ となり、$f(1) = 0$ である。）したがって示すべきとおり $f(x) = C \ln x$ であり、ここでも C は任意である。

検算

- $x = 1$、$y = 2$ とすると $z = \frac{1}{2}$ であり、2 つの導関数の係数は $\frac{6}{16}$ と $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{8}$ となって一致する。
- $A = 1$ のとき：$g(1) + g(2) = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} = \ln\frac{1}{3}$ であり、$g(\frac{1}{2}) = \ln\frac{1/2}{3/2} = \ln\frac{1}{3}$ である。✓
- コンピュータを用いて、1000 個のランダムな点で導関数の恒等式を有限差分（finite differences）により確認し、さらにいくつかの A の値について $g(x) + g(y) - g(z)$ がちょうど B に等しい（したがって $B = 0$ のときに限り 0 になる）ことを確認した。

よくある間違い

- x について微分するとき $g(y)$ が定数であることを忘れる、あるいは合成関数の微分による因子 $\partial z/\partial x$ を忘れる。
- $x = 1$ とおいたものの、そのとき z が本当に $(0, 1)$ 全体をとるかを確かめない。この確認こそが、1 つの等式をすべての u についての主張に変えるのである。
- 「積分定数は重要でないから」B は 0 でなければならないと思い込む。$B = 0$ を強いるのは方程式 $(*)$ であり、そのことは示す必要がある。

STEP のその先へ

2 つ目の方程式はコーシー（Cauchy）の対数型関数方程式である。$x = e^s$ とおくと、$h(s + t) = h(s) + h(t)$ に変わる。ここでは微分可能性を仮定したが、大学の解析学

（analysis）の最初の講義では、ただ 1 点での連続性（continuity）だけで $h(s) = cs$ が導かれることを学ぶ。一方、何の正則性も仮定しなければ、（ハメル基底（Hamel basis）を用いて構成される）とんでもない非線形の解が存在する。1 つ目の方程式も実は同じものの姿を変えたものである。$w = \ln \frac{u}{u+1}$ によって $(*)$ は加法的な方程式に変換される。この種の連続性による議論について読むには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。