解答例

STEP II 1991、第 6 問

純粋数学 • 積分の評価

> **STEP II 1991、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q6

鍵となる考え方

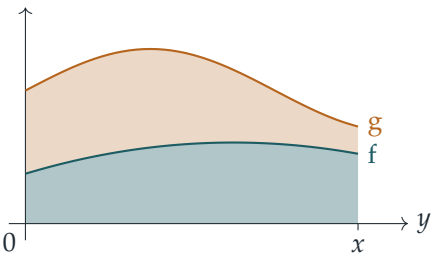
0 から x までの積分（integral）は面積であり、より小さい非負の関数が囲む面積はより小さい。この一つの事実を繰り返し使うことで、既知の不等式（inequality）から新しい不等式が得られる。$0 \leq \cos y \leq 1$ を積分すると $\sin x$ の評価が得られ、それを積分すると $\cos x$ の評価が得られ、さらに積分すると $\sin x$ のより精密な評価が得られる。そして各積分の評価は、被積分関数（integrand）を、正確に積分できる二つの関数で挟み込むことによって導かれる。

解答

積分の比較

$[0, x]$ 上で $\mathrm{f}(y) \geq 0$ であるから、f のグラフは y 軸上またはその上方にある。よって $\int_0^x \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y$ はグラフと軸の間の面積であり、非負である。また $\mathrm{f}(y) \leq \mathrm{g}(y)$ であるから、f の下側の領域は g の下側の領域に含まれ、その面積は大きくならない：

$$0 \leq \int_0^x \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y \leq \int_0^x \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y.$$



（解析的には：$g - f \geq 0$ であるから $\int_0^x (g-f)\,dy \geq 0$ であり、積分は線形（linear）である。）

$\sin x$ と $\cos x$ の評価

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ とする。$0 \leq y \leq x$ に対して $0 \leq \cos y \leq 1$ であるから、上の結果を $f = \cos$、$g = 1$ として用いると

$$0 \leq \int_0^x \cos y\,dy \leq \int_0^x 1\,dy, \qquad \text{すなわち} \qquad 0 \leq \sin x \leq x.$$

これは $[0, \frac{1}{2}\pi]$ のすべての x で成り立つから、特に $0 \leq y \leq x$ に対して $0 \leq \sin y \leq y$ である。再び結果を $f = \sin$、$g(y) = y$ として用いると

$$\int_0^x \sin y\,dy \leq \int_0^x y\,dy \quad \Longrightarrow \quad 1 - \cos x \leq \tfrac{1}{2}x^2 \quad \Longrightarrow \quad \cos x \geq 1 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

一つ目の積分

$[0, \frac{1}{10}]$（$[0, \frac{1}{2}\pi]$ に十分含まれる）上では $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1$ が成り立つから

$$3 - \tfrac{1}{2}x^2 \leq 2 + \cos x \leq 3.$$

考えてみよう そのまま 2 乗して逆数をとってよいだろうか？

よい。ここに現れる量はすべて正だからである：$3 - \frac{1}{2}x^2 \geq 3 - \frac{1}{200} > 0$。正の数については、2 乗しても大小関係は保たれ、逆数（reciprocal）をとると大小関係は逆転する。さらに $x \geq 0$ を掛けると

$$\frac{x}{9} \leq \frac{x}{(2+\cos x)^2} \leq \frac{x}{(3 - \frac{1}{2}x^2)^2} \qquad (0 \leq x \leq \tfrac{1}{10}).$$

三つの関数はいずれも非負であるから、0 から $\frac{1}{10}$ まで積分してよい。左辺からは

$$\int_0^{1/10} \frac{x}{9}\,dx = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1800}.$$

右辺については、分子の x は符号を除いて $3 - \frac{1}{2}x^2$ の導関数（derivative）であり、$\frac{d}{dx}(3 - \frac{1}{2}x^2)^{-1} = x(3 - \frac{1}{2}x^2)^{-2}$ である。よって

$$\int_0^{1/10} \frac{x}{(3 - \frac{1}{2}x^2)^2}\,dx = \left[\frac{1}{3 - \frac{1}{2}x^2}\right]_0^{1/10} = \frac{200}{599} - \frac{1}{3} = \frac{600 - 599}{1797} = \frac{1}{1797}.$$

したがって

$$\frac{1}{1800} \leq \int_0^{1/10} \frac{x}{(2+\cos x)^2}\,dx \leq \frac{1}{1797}.$$

$\sin x$ のより精密な評価

$0 \le y \le x \le \frac{1}{2}\pi$ に対して $\cos y \ge 1 - \frac{1}{2}y^2$、すなわち $0 \le 1 - \cos y \le \frac{1}{2}y^2$ である（左側の不等式は $\cos y \le 1$ による）。0 から x まで積分すると

$$\int_0^x (1 - \cos y)\,\mathrm{d}y \le \int_0^x \tfrac{1}{2}y^2\,\mathrm{d}y \quad\Longrightarrow\quad x - \sin x \le \tfrac{1}{6}x^3 \quad\Longrightarrow\quad \sin x \ge x - \tfrac{1}{6}x^3.$$

二つ目の積分

$[0, \frac{1}{10}]$ 上では $x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin x \le x$ が成り立つから

$$1 - \tfrac{1}{6}x^3 \le 1 - x + \sin x \le 1.$$

考えてみよう なぜこの組合せに注目するのが適切なのだろうか？

分母の $-x$ は $\sin x$ の主要項を打ち消すためにあり、その結果 1 に x^3 のオーダーの項が加わった形が残る。下からの評価 $1 - \frac{1}{6}x^3 \ge 1 - \frac{1}{6000}$ は正であるから、先ほどと同様に 2 乗し、逆数をとり（大小関係が逆転する）、$x^2 \ge 0$ を掛けると

$$x^2 \le \frac{x^2}{(1 - x + \sin x)^2} \le \frac{x^2}{(1 - \frac{1}{6}x^3)^2}.$$

積分すると、左辺からは $\int_0^{1/10} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1000} = \frac{1}{3000}$ が得られる。右辺については $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - \frac{1}{6}x^3)^{-1} = \frac{1}{2}x^2(1 - \frac{1}{6}x^3)^{-2}$ であるから

$$\int_0^{1/10} \frac{x^2}{(1 - \frac{1}{6}x^3)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^3}\right]_0^{1/10} = 2\left(\frac{6000}{5999} - 1\right) = \frac{2}{5999}.$$

したがって

$$\frac{1}{3000} \le \int_0^{1/10} \frac{x^2}{(1 - x + \sin x)^2}\,\mathrm{d}x \le \frac{2}{5999}.$$

検算

- シンプソンの公式（Simpson's rule）によると $\int_0^{1/10} x(2 + \cos x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 0.00055648$ であり、これは $1/1800 \approx 0.00055556$ と $1/1797 \approx 0.00055648$ の間にある（上からの評価は極めて精密で、約 5×10^{-10} の差で一致する）。
- 同様に $\int_0^{1/10} x^2(1 - x + \sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 0.000333389$ であり、これは $1/3000 \approx 0.000333333$ と $2/5999 \approx 0.000333389$ の間にある。
- 三つの各点ごとの不等式は、$[0, \frac{1}{2}\pi]$ の 10^5 個の無作為な点で成り立ち、$x = 0$ で等号が成立した。

よくある間違い

- 符号を確認せずに逆数をとること：$a \le b$ から $1/a \ge 1/b$ が従うのは、a と b が同符号のときに限る。
- 比較の結果の左側の不等式には $\mathrm{f} \ge 0$ が必要であることを忘れること。ここでは $\sin y \ge 0$ と $1 - \cos y \ge 0$ がそれを保証している。
- 積分の上からの評価に $\cos x \le 1$ を用いること：$\cos x \le 1$ からは分母が 9 より小さいことが分かり、これは上からの評価ではなく下からの評価 $1/1800$ を与える。

STEP のその先へ

$0 \le \cos y \le 1$ を繰り返し積分すると、交互に上下から挟むテイラー（Taylor）評価の列 $x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin x \le x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \le \cdots$ 全体が得られる。これは sin と cos のテイラー級数（Taylor series）がそれぞれの関数に収束（converge）することを証明する方法の一つである。積分の単調性（monotonicity）と被積分関数の比較は実解析（real analysis）の基本的な道具であり、剰余項（remainder）、誤差、極限を評価するのに用いられる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、積分と剰余項付きのテイラーの定理を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。