解答例

STEP II 1991、第 5 問

純粋数学 • 積分の漸化式

> **STEP II 1991、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q5

鍵となる考え方

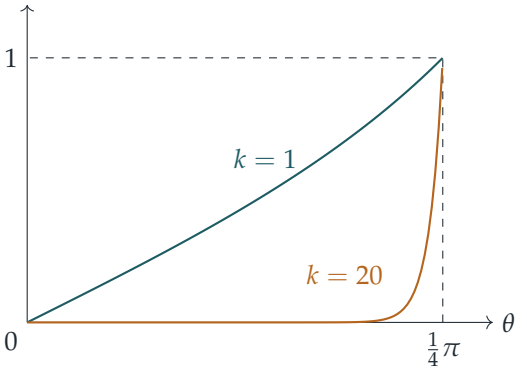
$I_k = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta \,\mathrm{d}\theta$ とおく。tan の奇数乗や偶数乗はそのままでは積分できないが、2 つを足し合わせると積分できる。実際、$\tan^k\theta + \tan^{k+2}\theta = \tan^k\theta\sec^2\theta$ であり、これは $\tan^{k+1}\theta/(k+1)$ の導関数（derivative）である。この漸化式（reduction formula）を数学的帰納法（induction）でたどると求める公式が得られる。また、k が大きいときのグラフの概形から積分が 0 に縮んでいくことがわかり、これによって公式が無限級数（infinite series）の和に変わるのである。

解答

グラフの概形

$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上では $0 \le \tan\theta \le 1$ であり、$\tan 0 = 0$、$\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ である。$k = 1$ のとき、グラフは $(0,0)$ から $(\frac{1}{4}\pi, 1)$ まで、ゆるやかに下に凸な曲線を描いて増加する（傾きは 1 から始まり、$\sec^2\frac{1}{4}\pi = 2$ で終わる）。

$k \gg 1$ のとき、1 より小さい $\tan\theta$ の値はすべて、高い次数で累乗されることで 0 の方へ押しつぶされる。一方、端の値 0 と 1 は変わらない。したがって $\tan^k\theta$ は区間の大部分で軸にほぼ張りつき、$\theta = \frac{1}{4}\pi$ のごく近くで急に 1 まで跳ね上がる。実際、u を小さいとして $\theta = \frac{1}{4}\pi - u$ と書くと $\tan\theta \approx 1 - 2u$ なので、$\tan^k\theta \approx (1-2u)^k \approx \mathrm{e}^{-2ku}$ となる。すなわち、この突起の幅はおよそ $1/(2k)$ であり、その下の面積もおよそ $1/(2k)$ である。



漸化式

$k \geq 0$ に対して

$$I_k + I_{k+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\,(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\tan^{k+1}\theta}{k+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{k+1}.$$

また、2つの初期値も必要である。

$$I_0 = \tfrac{1}{4}\pi, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \Big[-\ln\cos\theta\Big]_0^{\pi/4} = -\ln\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

奇数乗

$J_n = I_{2n+1}$ とおく。漸化式で $k = 2n-1$ とすると

$$J_n = \frac{1}{2n} - J_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

求める公式を数学的帰納法で証明する。$n=1$ のとき、$J_1 = \frac{1}{2} - J_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = (-1)^1(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2})$ であり、これは $n=1$ のときの公式である。

$n-1 \geq 1$ のとき成り立つと仮定する。すると

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{2n} - (-1)^{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\right) \\ &= (-1)^n\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\right) + (-1)^n\frac{(-1)^n}{2n} \\ &= (-1)^n\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2m}\right), \end{aligned}$$

となる。ここで、$(-1)^n(-1)^n = 1$ を用いて $\frac{1}{2n}$ を括弧内の $m=n$ の項として書いた。数学的帰納法により、公式はすべての正の整数 n について成り立つ。以上で示された。

1 つ目の級数

考えてみよう 「グラフで見ると小さそうだ」というだけでなく、$J_n \to 0$ であることはどうすればわかるだろうか？

きちんとした評価が必要である。$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上では $\tan\theta \geq 0$ かつ $\sec^2\theta \geq 1$ であるから

$$0 \leq J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1}\theta \,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1}\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+2}.$$

よって $n \to \infty$ のとき $J_n \to 0$ であり、これはまさに k が大きいときのグラフが示唆していたことである（評価 $1/(2n+2)$ は、突起の面積がおよそ $1/(2k)$ であることと一致している）。$|J_n|$ は公式の括弧の絶対値であるから

$$\left|\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}\right| = J_n \leq \frac{1}{2n+2} \to 0,$$

となり、部分和（partial sums）$\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}$ は $-\frac{1}{2}\ln 2$ に収束（converge）する。-1 を掛けて

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

2 つ目の級数

次に、偶数乗について同じことを行う。$K_n = I_{2n}$ とおく。漸化式で $k = 2n-2$ とすると

$$K_n = \frac{1}{2n-1} - K_{n-1} \qquad (n \geq 1), \qquad K_0 = \tfrac{1}{4}\pi.$$

まったく同じ帰納法（今度は $K_1 = 1 - \frac{1}{4}\pi$ から始める）により

$$K_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}\theta \,\mathrm{d}\theta = (-1)^n\left(\tfrac{1}{4}\pi + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m-1}\right):$$

が得られる。帰納法の段階は、先ほどとまったく同様に $K_n = \frac{1}{2n-1} - (-1)^{n-1}(\cdots) = (-1)^n(\cdots) + (-1)^n\frac{(-1)^n}{2n-1}$ である。同じ評価により

$$0 \leq K_n \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+1} \to 0,$$

となるので、$\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m-1} \to -\frac{1}{4}\pi$、すなわち

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

検算

- $n = 1$ のとき、$\int_0^{\pi/4} \tan^3\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.15343$ であり、この積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると小数第 10 位まで同じ値が得られる。この方法で、$n = 1, \ldots, 11$ について I_{2n+1} と I_{2n} の公式を確かめた。
- k が大きいとき、数値的には $I_{100} \approx 0.0049995$、$I_{1000} \approx 0.00049999996$ であり、グラフの概形から予想されるとおり $1/(2k)$ に非常に近い。
- 2 つの級数を 100 万項まで足すと $0.346573\ldots$ と $0.785398\ldots$ になり、$\frac{1}{2}\ln 2 = 0.346574$、$\frac{1}{4}\pi = 0.785398$ と比べられる。誤差は、上の評価が示唆するとおり、次の項とほぼ同じ大きさである。

よくある間違い

- 評価を示さずに「$\tan^{2n+1}\theta \to 0$ だから積分は 0 に近づく」と述べること。被積分関数（integrand）は $\theta = \frac{1}{4}\pi$ では 0 に近づか**ない**ので、$\sec^2\theta \geq 1$ による評価のような根拠が必要である。
- 帰納法での符号の誤り。$(-1)^n$ は括弧の外に出しておき、$n = 1$ の場合を直接計算した値と照らし合わせて確認すること。

STEP のその先へ

1 つ目の級数は交代調和級数（alternating harmonic series）$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$ の半分であり、2 つ目は π に関するライプニッツ級数（Leibniz series）である。どちらも**条件収束**（conditionally convergent）するにすぎない。すなわち、項の順序を並べ替えると和が変わりうる。これは解析学（analysis）の最初の講義で早いうちに出会う驚くべき事実である（リーマン（Riemann）の再配列定理）。ここでの議論、つまり誤差項を正確に求めてそれを 0 に挟み込むという考え方は、剰余項付きのテイラーの定理（Taylor's theorem with remainder）と同じ発想である。Abbott の *Understanding Analysis* では、この両方が丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。