解答例

STEP II 1991、第 4 問

純粋数学 ・ 余弦の和

> **STEP II 1991、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.2 節「ガウスの正 17 角形」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/gauss-17gon.html

鍵となる考え方

$5\phi = 2\pi$ および $17\theta = 2\pi$ であるから、角の大きな倍数の余弦は小さな倍数の余弦に折り返される。すなわち $n\phi = 2\pi$ のとき $\cos(n-k)\phi = \cos k\phi$ である。したがって、余弦の和を積和公式（product formula）を用いて 2 乗したり掛け合わせたりすると、すべてが同じ少数の余弦に帰着する。後半では、8 つの余弦 $\cos\theta, \ldots, \cos 8\theta$ を 4 つずつの 2 組に分け、それらの和と積を求めることで、z を解にもつ二次方程式（quadratic）を得る。

解答

正五角形：$\phi = 2\pi/5$

積和公式 $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ と $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$ を用いる。$5\phi = 2\pi$ であるから、

$$\cos 3\phi = \cos(2\pi - 2\phi) = \cos 2\phi, \qquad \cos 4\phi = \cos(2\pi - \phi) = \cos\phi.$$

よって

$$\begin{aligned} y^2 &= \cos^2\phi + 2\cos\phi\cos 2\phi + \cos^2 2\phi \\ &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 3\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\phi) \\ &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 2\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos\phi) \\ &= 1 + \tfrac{3}{2}(\cos\phi + \cos 2\phi) = 1 + \tfrac{3}{2}y. \end{aligned}$$

両辺に 2 を掛けると $2y^2 = 3y + 2$ となり、示すべき式が得られる。

これは $(2y+1)(y-2) = 0$ と因数分解できるので、$y = -\frac{1}{2}$ または $y = 2$ である。ところが $2\phi = \frac{4\pi}{5}$ は $\frac{\pi}{2}$ と π の間にあるので $\cos 2\phi < 0$ であり、一方 $\cos\phi \le 1$ である。ゆえに $y < 1$ であり、$y = 2$ は除外される。したがって

$$y = \cos\tfrac{2\pi}{5} + \cos\tfrac{4\pi}{5} = -\tfrac{1}{2}.$$

$\theta = 2\pi/17$ に対する余弦の和

$\omega = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ とおく。ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）により $\omega^k = \cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta$ であり、$\omega^{17} = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1$、かつ $\omega \neq 1$ である。等比級数（geometric series）の和を求めると、

$$\sum_{k=0}^{16} \omega^k = \frac{\omega^{17} - 1}{\omega - 1} = 0.$$

実部（real part）をとると $\displaystyle\sum_{k=0}^{16} \cos k\theta = 0$ となり、示すべき式が得られる。

z の値

$c_k = \cos k\theta$ と書く。$17\theta = 2\pi$ であり、余弦は偶関数であるから、

$$c_{17-k} = c_k \quad \text{かつ} \quad c_{-k} = c_k,$$

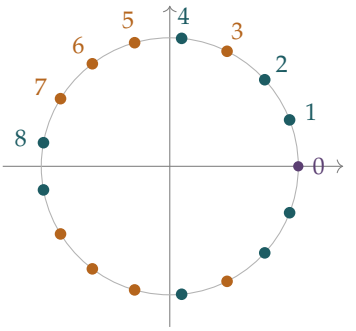
したがって、どの c_k も $c_1, c_2, \ldots, c_8$ のいずれかに等しい。特に、いま証明した和から $c_0 = 1$ を除くと $2(c_1 + c_2 + \cdots + c_8) = -1$ となるので、

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_8 = -\tfrac{1}{2}. \qquad (*)$$

z に現れる角は $1, 2, 4, 8$ である（それぞれ直前の値の 2 倍であり、上のように帰着させると $16 \to 1$ となる）。残りの 4 つ $3, 5, 6, 7$ からは、対となる和

$$w = c_3 + c_5 + c_6 + c_7.$$

が得られる。図は単位円（unit circle）上の 17 個の点 ω^k を示している。ティール色の点（およびその鏡像）が z に現れる余弦を、琥珀色の点が w に現れる余弦を担っている。



和。 $(*)$ により、$z+w=c_1+c_2+\cdots+c_8=-\frac{1}{2}$ である。

積。 zw を展開すると、$a\in\{1,2,4,8\}$、$b\in\{3,5,6,7\}$ に対する 16 個の積 c_ac_b が現れ、それぞれは $\frac{1}{2}(c_{a+b}+c_{a-b})$ に等しい。各添字を 1 から 8 の範囲に帰着させると（$c_{-k}=c_k$ と $c_{17-k}=c_k$ を用いる）、添字の組は次のとおりである。

	$b=3$	$b=5$	$b=6$	$b=7$
$a=1$	4, 2	6, 4	7, 5	8, 6
$a=2$	5, 1	7, 3	8, 4	8, 5
$a=4$	7, 1	8, 1	7, 2	6, 3
$a=8$	6, 5	4, 3	3, 2	2, 1

（たとえば $a=8$、$b=7$ からは c_{15} と c_1 が得られ、$c_{15}=c_2$ である。）

考えてみよう　どの余弦が現れるかを知る必要があるのか、それとも何回現れるかだけでよいのか？

何回現れるかだけでよい。表を数えると、32 個の成分の中に添字 $1,2,\ldots,8$ はそれぞれちょうど 4 回ずつ現れる。よって、再び $(*)$ を用いて

$$zw=\tfrac{1}{2}\cdot 4\,(c_1+c_2+\cdots+c_8)=2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)=-1,$$

を得る。

二次方程式。 $z+w=-\frac{1}{2}$ かつ $zw=-1$ であるから、z と w は

$$t^2+\tfrac{1}{2}t-1=0,\qquad \text{すなわち}\qquad 2t^2+t-2=0,$$

の解であり、$\{z, w\} = \left\{ \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4},\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \right\}$ となる。1 つ目の解は正、2 つ目の解は負である。

解の選択。 $z > 0$ を示す。$\frac{4}{17} < \frac{1}{4}$ であるから、θ と 2θ はともに $(0, \frac{\pi}{4})$ に属し、c_1 と c_2 はともに $\frac{1}{\sqrt{2}}$ より大きく、$c_1 + c_2 > \sqrt{2} > 1$ である。また $4\theta = \frac{8\pi}{17} < \frac{\pi}{2}$ であるから $c_4 > 0$ であり、$c_8 \geq -1$ である。したがって

$$z = (c_1 + c_2) + c_4 + c_8 > 1 + 0 - 1 = 0,$$

であり、z は正の解でなければならない：

$$z = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} = -\frac{1-\sqrt{17}}{4}.$$

検算

数値的には、$\cos 72^\circ + \cos 144^\circ = 0.30902 - 0.80902 = -0.5$ である。$\theta = 2\pi/17$ のとき、電卓によれば $z = 0.932472 + 0.739009 + 0.092268 - 0.982973 = 0.780776$ であり、$(\sqrt{17} - 1)/4 = 0.780776$ である。また $w = -1.280776 = (-1 - \sqrt{17})/4$ であるから、求めたとおり $z + w = -0.5$、$zw = -1$ となる。

よくある間違い

- 前半で $y = 2$ を除外し忘れること、あるいは後半で w の解を除外し忘れること。二次方程式からは候補が 2 つ得られるので、どちらかを選ぶには別に符号についての議論が必要である。
- $(*)$ に $k = 0$ を含めてしまうこと。全体の和は 0 であるが、$c_0 = 1$ なので $c_1 + \cdots + c_{16} = -1$ であり、これを半分にして $-\frac{1}{2}$ を得る。
- 積の表で添字の帰着を誤ること。たとえば c_9 を c_8 としてではなく新しい項として扱ってしまうこと。

STEP のその先へ

これは、正十七角形（regular 17-gon）が定規とコンパス（ruler and compasses）で作図できることを示した、ガウス（Gauss）の有名な計算である。17 を法とする生成元（generator）である 3 の累乗によって余弦を 8、4、2、1 個ずつの入れ子になった組に分けると、二次方程式の連鎖が得られ、したがって $\cos\frac{2\pi}{17}$ は平方根だけを用いて表せ

る。z と w はその連鎖の第 1 段階であり、ガウス周期（Gaussian periods）と呼ばれる。この話の全体像はガロア理論（Galois theory）に属する。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照せよ。また 1 の冪根（roots of unity）の数論については Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等算術）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。