解答例

STEP II 1991、第 3 問

純粋数学 • 対称な連立方程式

> **STEP II 1991、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q3

鍵となる考え方

三つの等しい式からは方程式が二つしか得られず、未知数が三つあるので x, y, z そのものを求めることは望めない。できるのは巡回対称性（cyclic symmetry）を利用することである。式を二つずつ引くと、各差 $x-y$ は次の差 $y-z$ の定数倍で表され、三つの関係式を掛け合わせるとほとんどすべてが約分される。二つ目の結果については、共通の値に k という名前をつけて分母を払うと、巡回的な三つの一次の関係式が得られ、それらが xyz を三通りの方法で決定する。

解答

$x^2y^2z^2 = 1$ であることの証明

最初の二つの式を等しいとおくと、

$$x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{y-z}{yz}.$$

同様に、二つ目と三つ目、さらに三つ目と一つ目を等しいとおくと、

$$y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{z-x}{zx}, \qquad z - x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}.$$

これら三つの等式を掛け合わせると、

$$(x-y)(y-z)(z-x) = \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{x^2y^2z^2}.$$

x, y, z は相異なるので、積 $(x-y)(y-z)(z-x)$ は零ではなく、両辺をこれで割ってよい。すると $1 = 1/(x^2y^2z^2)$ が残る。すなわち

$$x^2y^2z^2 = 1,$$

となり、示すべきことが得られた。

> **考えてみよう** x, y, z が相異なり、かつ零でないという条件は、正確にはどこで使ったか。

零でないことは、そもそも分数 $1/x, 1/y, 1/z$ が意味をもつために必要である。相異なることによって $(x-y)(y-z)(z-x)$ で割ることができる。この条件がなければ結果は成り立たない。実際、$x=y=z=2$ は方程式を満たすが、$x^2y^2z^2=64$ である。

共通の値は ± 1 である

共通の値を k とおくと、

$$x+\frac{1}{y}=k, \qquad y+\frac{1}{z}=k, \qquad z+\frac{1}{x}=k.$$

それぞれに y, z, x を掛けると（いずれも零でない）、

$$xy=ky-1, \qquad yz=kz-1, \qquad zx=kx-1. \tag{$*$}$$

ここで一つ目の式に z を掛け、二つ目の式を用いて yz を置き換えると、

$$\begin{aligned} xyz &= k\,yz - z \\ &= k(kz-1)-z \\ &= (k^2-1)z-k. \end{aligned}$$

関係式 $(*)$ は $x\to y\to z\to x$ という置き換えで不変であるから、二つ目および三つ目の関係式から始めて同じ計算をすると、

$$xyz=(k^2-1)x-k, \qquad xyz=(k^2-1)y-k.$$

xyz の最初の二つの表示を引くと、

$$(k^2-1)(z-x)=0.$$

$z\neq x$ であるから $k^2=1$ でなければならず、したがって $x+\frac{1}{y}$ の値は $+1$ または -1 であり、示すべきことが得られた。

おまけとして、$k^2=1$ を代入し直すと $xyz=-k$ が得られる。このとき $x^2y^2z^2=k^2=1$ となるので、これは最初の結果に至る別の道筋にもなっている。

検算

どちらの値も実際に現れる。$k=1$ のとき、任意の $x\neq 0,1$ から始めて $y=\frac{1}{1-x}$, $z=\frac{1}{1-y}=\frac{x-1}{x}$ とおく。すると $z+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x}=1$ となるので、三つの式は

すべて 1 に等しい。たとえば $x = 2$ とすると $y = -1, z = \frac{1}{2}$ であり、確かに $2-1 = -1+2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ かつ $xyz = -1 = -k$ である。(x,y,z) を $(-x,-y,-z)$ で置き換えると、$(-2,1,-\frac{1}{2})$ のような $k = -1$ の解が得られる。ここで三つの数は常に相異なる。なぜなら $x = \frac{1}{1-x}$ となるには $x^2 - x + 1 = 0$ が必要であるが、これは実数解をもたないからである。このような三つ組を正確な分数で約 4000 個調べ、いずれについても $x^2y^2z^2 = 1$ および $xyz = -k$ が成り立つことを確認した。

よくある間違い

- $(x-y)(y-z)(z-x)$ が零でない理由を述べずにこれで割ってしまう。相異なるという条件はまさにこのためにある。
- $xyz = \pm 1$ ではなく $xyz = 1$ と結論してしまう。実際には $xyz = -k$ であるから、共通の値が 1 のときは $xyz = -1$ である。

STEP のその先へ

写像 $t \mapsto \dfrac{1}{k-t}$ は x を y に、y を z に、そして z を x に戻す。これはメビウス変換（Möbius transformation）であり、その行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$ である。このような写像の合成は、それらの行列の積に対応する。この問題が本当に問うているのは、この写像がいつ 3 周期の巡回をもつかということであり、その答え $k^2 = 1$ は、ちょうど行列の 3 乗が単位行列の定数倍になる場合にあたる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）には、メビウス変換と、行列のトレースによるその分類についての見事な章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。