解答例

STEP II 1991、第 2 問

純粋数学 ・ 双曲線の漸近線

> **STEP II 1991、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q2

鍵となる考え方

2 次の部分 $3y^2 - 10xy + 3x^2$ は $(3y - x)(y - 3x)$ と因数分解（factorise）でき、これがすべてである。1 次の項まで含めてこの因数分解を完成させると、曲線は「2 つの 1 次式の積 $= 1$」という形になる。曲線上を遠くへ進むと一方の因数は限りなく大きくならざるをえないので、もう一方の因数は 0 に近づかなければならない。その因数を 0 とおいたものが漸近線（asymptote）である。これこそ、ヒントが求めている「極限における s と t の関係」にほかならない。

解答

接線

(†) を x について陰関数微分（implicit differentiation）すると、

$$6y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 10y - 10x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6x + 16\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 16 = 0,$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{10y - 6x + 16}{6y - 10x + 16} = \frac{5y - 3x + 8}{3y - 5x + 8}.$$

点 (s, t) における傾きは $m = \dfrac{5t - 3s + 8}{3t - 5s + 8}$ であり、接線（tangent）は $y = mx + (t - ms)$ である。切片を通分すると、

$$t - ms = \frac{t(3t - 5s + 8) - s(5t - 3s + 8)}{3t - 5s + 8} = \frac{3t^2 - 10st + 3s^2 + 8t - 8s}{3t - 5s + 8}.$$

(s,t) は曲線上にあるので $3t^2-10st+3s^2=-16t+16s-15$ であり、分子は $-8t+8s-15=-(8t-8s+15)$ となる。よって接線は

$$y=\left(\frac{5t-3s+8}{3t-5s+8}\right)x-\left(\frac{8t-8s+15}{3t-5s+8}\right),$$

となり、示すべき式が得られた。($3t-5s+8=0$ のときは接線は鉛直であり、この式は分母を払った形で読むものとする。)

漸近線

(†) を $(3y-x+a)(y-3x+b)+k=0$ の形に書くことを試みる。展開すると

$$(3y-x+a)(y-3x+b)=3y^2-10xy+3x^2+(3b+a)y-(b+3a)x+ab,$$

となるので、$3b+a=16$ かつ $b+3a=16$ が必要であり、$a=b=4$、$ab=16$ を得る。したがって (†) は

$$(3y-x+4)(y-3x+4)=1.$$

と書ける。点 (s,t) に対して

$$u=3t-s+4,\qquad v=t-3s+4,\qquad \text{とおくと}\qquad uv=1.$$

接線の式に現れる式はすべて u、v と定数の組合せで表せる。t と s の係数を比較すると

$$\begin{aligned}5t-3s+8&=\tfrac{1}{2}(3u+v),\\3t-5s+8&=\tfrac{1}{2}(u+3v),\\8t-8s+15&=2(u+v)-1=2(u+v)-uv,\end{aligned}$$

となる。ただし最後の式では $uv=1$ を用いた。よって接線の傾きと切片は

$$m=\frac{3u+v}{u+3v},\qquad c=\frac{8t-8s+15}{3t-5s+8}=\frac{2(2u+2v-uv)}{u+3v}.$$

考えてみよう $s\to\infty$ のとき、u と v はどうなるか。

t を消去すると $u-3v=8s-8$ なので、$u-3v\to\infty$ である。$uv=1>0$ より、u と v は同符号である。

- ともに正ならば、$u-3v\to\infty$ より $u\to\infty$ でなければならず、すると $v=1/u\to 0$ である。
- ともに負ならば、$u-3v=3|v|-|u|\to\infty$ より $|v|\to\infty$ でなければならず、すると $u=1/v\to 0$ である。

これがヒントの求める関係である。一方の分枝では $t-3s+4\to 0$、もう一方の分枝では $3t-s+4\to 0$ となる。

$v\to 0$、$u\to\infty$ の場合。分子と分母を u で割ると

$$m=\frac{3+v/u}{1+3v/u}\to 3,\qquad c=\frac{2(2+2v/u-v)}{1+3v/u}\to 4,$$

となるので、接線の極限は $y=3x-4$ である。

$u\to 0$、$v\to\infty$ の場合。分子と分母を v で割ると

$$m=\frac{3u/v+1}{u/v+3}\to \tfrac{1}{3},\qquad c=\frac{2(2u/v+2-u)}{u/v+3}\to \tfrac{4}{3},$$

となるので、接線の極限は $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$、すなわち $3y=x-4$ である。

よって漸近線は $y=3x-4$ と $3y=x-4$ である。（代わりに $s\to-\infty$ とすると、2つの場合の役割が入れ替わるだけで同じ2直線が得られる。）これらはちょうど直線 $v=0$ と $u=0$ であることに注意しよう。因数分解した形を見れば、すぐにわかることである。

角と軸

直線 $y=3x-4$ の傾きは3なので、x 軸となす角 θ は $\tan\theta=3$ を満たす。このとき y 軸となす角は $\frac{\pi}{2}-\theta$ であり、$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta=\frac{1}{3}$ である。直線 $3y=x-4$ の傾きは $\frac{1}{3}$ なので、x 軸となす角は $\arctan\frac{1}{3}$ であり、これは1本目の漸近線が y 軸となす角と等しい。

考えてみよう なぜこれから角の二等分線がわかるのか。

直線 $y=x$ に関する鏡映（reflection）は x 軸と y 軸を入れ替え、いま示したことから、2本の漸近線の方向も入れ替える。すなわち方向 $(1,3)$ は $(3,1)$ に移る。したがって漸近線のなす角は $y=x$ の方向に関して対称であり、$y=x$ がその角を二等分する。実際、漸近線の方向は x 軸から $\arctan 3$ と $\arctan\frac{1}{3}$ の角をなし、これらは $\frac{\pi}{4}\pm\left(\arctan 3-\frac{\pi}{4}\right)$ である。もう1本の二等分線は1本目に垂直である。よって二等分線（bisector）の傾きは 1 と -1 である。

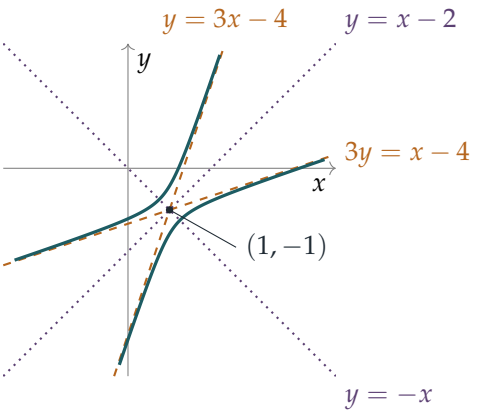
双曲線（hyperbola）の軸は、中心（漸近線の交点）を通る漸近線の角の二等分線である。$y=3x-4$ と $3y=x-4$ を連立すると $9x-12=x-4$ より $x=1$、$y=-1$ である。中心は $(1,-1)$ であり、軸は

$$y+1=x-1\iff y=x-2,\qquad y+1=-(x-1)\iff y=-x.$$

である。

どちらがどちらの軸かを見るには次のようにする。$y=-x$ 上では $u=v=4-4x$ なので、$uv=1$ より $x=1\pm\frac{1}{4}$ であり、頂点は $(\frac{5}{4},-\frac{5}{4})$ と $(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$ である。よって

$y = -x$ は主軸（transverse axis）である。$y = x - 2$ 上では $u = 2x - 2 = -v$ なので $uv = -(2x-2)^2 \leq 0$ となり、この直線（副軸（conjugate axis））は曲線と交わらない。



検算

- 点 $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4})$ は (†) を満たす：$3 \cdot \frac{25}{16} + 10 \cdot \frac{25}{16} + 3 \cdot \frac{25}{16} - 20 - 20 + 15 = 25 - 25 = 0$。
- 数値的に、$u = 10^8$（このとき $s \approx 1.25 \times 10^7$）とすると、接線の式から傾き 3.0000000、切片の項 3.99999998 が得られる。$u = -10^{-8}$ とすると 0.33333333 と 1.33333334 が得られる。
- 中心 $(1, -1)$ では $u = v = 0$ となるので、中心は曲線上にない。接線の式が決して $0/0$ にならないのはこのためである。

よくある間違い

- （$t \approx ks$ として）$3k^2 - 10k + 3 = 0$ から傾き 3 と $\frac{1}{3}$ だけを求め、切片には次の項が必要であることを忘れる。$t \approx 3s$ だけでは不十分で、$t = 3s - 4 + o(1)$ が必要である。
- 二等分線を中心 $(1, -1)$ ではなく原点を通るものとしてしまう。

STEP のその先へ

任意の 2 次曲線（conic）$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ は、対称行列（symmetric matrix）$A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ を用いて $\mathbf{x}^\mathsf{T} A \mathbf{x} + \ldots$ の形に書くことができ、その軸は A の固

有ベクトル（eigenvector）の方向を向く。ここでは $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルは $(1,1)$ と $(1,-1)$ であり、固有値（eigenvalue）は異符号の -2 と 8 である。これが、この曲線を双曲線にしているのである。このような 2 次形式（quadratic form）の対角化（diagonalisation）は、大学 1 年次の線形代数の中心的な話題である。Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。