解答例

STEP II 1991、第 14 問

力学 ・ 相対速度と追跡

STEP II 1991、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

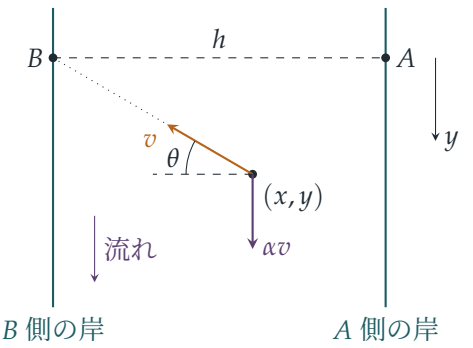
step.maths.org/questions/91-s2-q14

鍵となる考え方

ボートの対地速度は、水に対するボートの速度に水の速度を加えたものである。「常に B の方を向いている」という条件は $y = x\tan\theta$ という幾何的な条件であり、これを微分すると同じ速度についてもう一つの表示が得られる。二つを比較すると、x と θ を結ぶ変数分離形（separable）の微分方程式が得られる。置換（substitution）$\tan\theta = \sinh(\alpha s)$ を選ぶのは、これによって $\sec\theta + \tan\theta$ が指数関数になり、すべてが s の単純な指数関数で表されるからである。

解答

ボートを質点（particle）としてモデル化する。B を原点とし、x を B 側の岸から A の方へ測り、y を下流方向に測る。すると A は $(h, 0)$ にあり、ボートはそこから出発する。



θ を用いた速度の表示

ボートは B 側の岸の方を向き、方向 AB に対して角 θ だけ上流側に傾いている（流されるのを打ち消すためである）。したがって、水に対するボートの速度は、(x, y) 成分で表すと単位ベクトル $-(\cos\theta, \sin\theta)$ の向きに大きさ v である。これに y 方向の速さ αv の流れを加えると、

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v\cos\theta \\ \alpha v - v\sin\theta \end{pmatrix}.$$

B の方を向くこと

点 (x, y) にあるボートから B への向きは $(-x, -y)$ の向きであり、これが AB と角 θ をなすのは、ちょうど $\tan\theta = y/x$ のときである。よって、運動の間中、

$$y = x\tan\theta.$$

が成り立つ。積の微分法（product rule）と合成関数の微分法（chain rule）を用いて t で微分すると、

$$\dot{y} = \tan\theta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

となり、速度ベクトル $(\dot{x}, \dot{y})$ は求める形をもつ。

x と θ の微分方程式

ここで二つの表示を比較する。x 成分から $\dot{x} = -v\cos\theta$ を得る。これを y 成分に代入すると、

$$\begin{aligned} \tan\theta\,(-v\cos\theta) + x\sec^2\theta\,\dot{\theta} &= \alpha v - v\sin\theta \\ x\sec^2\theta\,\dot{\theta} &= \alpha v, \end{aligned} \qquad (*)$$

となる。$\tan\theta\cos\theta = \sin\theta$ であり、$-v\sin\theta$ の項が打ち消し合うからである。特に $\dot{\theta} > 0$ なので、θ は 0 から単調に増加し、x を θ の関数とみなしてよい。割り算をすると、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\dot{x}}{\dot{\theta}} = \frac{-v\cos\theta\cdot x\sec^2\theta}{\alpha v} = -\frac{x\sec\theta}{\alpha}, \qquad \text{よって} \qquad \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -x\sec\theta,$$

となり、示すべき式が得られた。

x を求める

この方程式は変数分離できる（ボートが到着するまでは $x > 0$ である）。

$$\alpha\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta \quad\Longrightarrow\quad \alpha\ln x = -\ln(\sec\theta + \tan\theta) + C,$$

ここで、$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ で成り立つ標準的な積分 $\int \sec\theta \,\mathrm{d}\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$ を用いた。出発時にボートは A にあり、そこでは $x = h$、$\theta = 0$ であるから、$C = \alpha \ln h$ である。したがって

$$\alpha \ln \frac{x}{h} = -\ln(\sec\theta + \tan\theta), \qquad \text{すなわち} \qquad \left(\frac{x}{h}\right)^{\alpha} = (\sec\theta + \tan\theta)^{-1}.$$

置換 $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$

? **考えてみよう** $\sec\theta$ を s で表すとどうなるか。

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \sinh^2(\alpha s) = \cosh^2(\alpha s)$ であり、$\sec\theta$ と $\cosh(\alpha s)$ はともに正である（$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ だからである）。よって $\sec\theta = \cosh(\alpha s)$ を得る。すると

$$\sec\theta + \tan\theta = \cosh(\alpha s) + \sinh(\alpha s) = \mathrm{e}^{\alpha s},$$

であるから $(x/h)^{\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha s}$ となり、両辺の α 乗根をとって $x = h\mathrm{e}^{-s}$ を得る。

速さについての方程式を得るために、$\tan\theta = \sinh(\alpha s)$ を t で微分する。

$$\sec^2\theta\,\dot{\theta} = \alpha\cosh(\alpha s)\,\dot{s}.$$

これと $x = h\mathrm{e}^{-s}$ を $(*)$ に代入すると $h\mathrm{e}^{-s} \cdot \alpha\cosh(\alpha s)\,\dot{s} = \alpha v$ となり、α で割ると、

$$h\mathrm{e}^{-s}\cosh(\alpha s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v,$$

となって、示すべき式が得られた。

横断に要する時間

A では $\theta = 0$ なので $s = 0$ である。$\dot{s} > 0$ より s は増加し、ボートが B に到達するのは $x = h\mathrm{e}^{-s} \to 0$ のとき、すなわち $s \to \infty$ のときである。（ボートは実際に B に到着する。$\alpha < 1$ であるから $y = x\tan\theta = h\mathrm{e}^{-s}\sinh(\alpha s) \to 0$ となるからである。）変数を分離すると、横断に要する時間は

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{v}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s}\cosh(\alpha s)\,\mathrm{d}s = \frac{h}{2v}\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{-(1-\alpha)s} + \mathrm{e}^{-(1+\alpha)s})\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{h}{2v}\left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}\right) = \frac{h}{2v}\cdot\frac{2}{1-\alpha^2} = \frac{h}{v(1-\alpha^2)}, \end{aligned}$$

である。ここで、$1 - \alpha > 0$ であるから、どちらの積分も収束（converge）する。よって、横断に要する時間は $hv^{-1}(1-\alpha^2)^{-1}$ である。

検算

- 流れがない場合（$\alpha = 0$）、ボートはまっすぐ対岸へ向かい、当然 $T = h/v$ となる。$\alpha \to 1$ のとき時間は発散する。流れより速くないボートは、真上流を向くことになる B の近くで、流れに逆らって前進することが決してできないからである。
- 運動を数値的に追跡した（4 次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）を用い、各ステップで B の方へ舵を取る）。$h = v = 1$、$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき、ボートは $t \approx 1.33333$ に到着し、$1/(1 - \frac{1}{4}) = \frac{4}{3}$ と一致した。経路に沿って、$(x/h)^{\alpha}(\sec\theta + \tan\theta)$ はおよそ 10^{-13} の精度で 1 に等しいままであった。

よくある間違い

- 船首の向きの y 成分の符号を間違えること。ボートは下流へ流されるので、B の方を向くことは一部上流を向くことを意味する。$\theta > 0$ のとき、その成分は $-v\sin\theta$ である。
- $\sec\theta = +\cosh(\alpha s)$ の根拠を示し忘れること。これには θ が $\frac{\pi}{2}$ 未満にとどまることが必要であり、θ は B から $x > 0$ の点へ引いた直線の角であるから、これは成り立つ。

STEP のその先へ

これは古典的な**追跡曲線**（*pursuit curve*）の問題である。ある物体が絶えず目標の方へ舵を取り、その経路を運動の向きについての微分方程式から求める。同じ考え方で、動いている飼い主を追いかける犬や、目標を追尾するミサイルを記述することができ、トラクトリックス（tractrix）のような曲線へと自然につながる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対速度（relative velocity）や、運動する座標系での運動方程式の立て方に習熟するのに適した本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。