解答例

STEP II 1991、第 13 問

力学 ・ 剛体の回転

> **STEP II 1991、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q13

鍵となる考え方

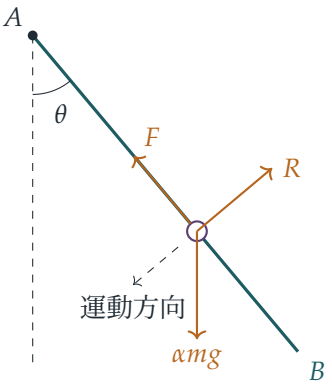
輪が滑り出すまでは、棒と輪は A を支点とする一つの剛体（rigid body）として一体となって運動する。したがって、この合成された物体の角速度（angular speed）をエネルギーから、角加速度（angular acceleration）を力のモーメント（moments）から求めることができる。次に、それらを用いて、輪が棒と一緒に動き続けるために棒が輪に及ぼさなければならない力を求める。輪が棒上で静止していられるのは、必要な摩擦力が垂直抗力の μ 倍以下である間だけであり、その条件が初めて破れる角度で滑りが始まる。

解答

モデル化

輪は A から距離 x の位置にある質点、支点はなめらか、棒は剛体として扱う。棒と鉛直下向きのなす角を θ とすると、放した瞬間は $\theta = \frac{\pi}{2}$ であり、棒が振り下ろされるにつれて θ は減少する。角速度を $\omega = |\dot{\theta}|$、角加速度の大きさを $\beta = |\ddot{\theta}|$ と書く。

棒は輪に二つの力を及ぼす。一つは棒に垂直な垂直抗力（normal reaction）R で、輪の運動の向きを正とする。もう一つは棒に沿った摩擦力（friction）F で、A に向かう向きを正とする。輪は棒に通されているので、R はどちらの符号にもなりうる。



図では R を運動と逆向きに描いている。$k^2 > xd$ のときには実際にそうなるからであるが、計算では符号を一般のまま扱う。

剛体の運動

輪が棒に固定されているとき、A のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $mk^2 + \alpha m x^2 = m(k^2 + \alpha x^2)$ である。放した位置から、棒の重心（centre of mass）は $d\cos\theta$ だけ、輪は $x\cos\theta$ だけ下がっているので、エネルギー保存則（conservation of energy）より

$$\tfrac{1}{2}m(k^2 + \alpha x^2)\,\omega^2 = mg(d + \alpha x)\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{2g(d + \alpha x)\cos\theta}{k^2 + \alpha x^2}.$$

A のまわりの力のモーメントを考えると（支点からの力はモーメントをもたない）、重力の合計のモーメントは $mg(d + \alpha x)\sin\theta$ であるから

$$\beta = \frac{g(d + \alpha x)\sin\theta}{k^2 + \alpha x^2}.$$

輪にはたらく力

輪は半径 x の円周上を運動する。その加速度は、棒に沿って A に向かう向きに $x\omega^2$、棒に垂直で運動の向きに $x\beta$ である。棒に沿って外向きの方向は鉛直下向きと角 θ をなすので、重力の成分は棒に沿って外向きに $\alpha mg\cos\theta$、運動の向きに $\alpha mg\sin\theta$ である。

棒に沿って A に向かう向きについて：$F - \alpha mg\cos\theta = \alpha m x\omega^2$ であるから

$$\begin{aligned} F &= \alpha mg\cos\theta\left(1 + \frac{2x(d + \alpha x)}{k^2 + \alpha x^2}\right) \\ &= \frac{\alpha mg\cos\theta\,(k^2 + 3\alpha x^2 + 2xd)}{k^2 + \alpha x^2}. \end{aligned}$$

棒に垂直で運動の向きについて：

$$R+\alpha mg\sin\theta=\alpha mx\beta \quad\Longrightarrow\quad R=\alpha mg\sin\theta\left(\frac{x(d+\alpha x)}{k^2+\alpha x^2}-1\right)=\frac{\alpha mg\sin\theta\,(xd-k^2)}{k^2+\alpha x^2}.$$

R では αx^2 の項が打ち消し合うことに注意しよう。そのため k^2-xd だけが現れるのである。

考えてみよう 輪はどちら向きに滑ろうとするか。また、R の符号は何を意味するか。

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ では $F>0$ である。つまり棒は輪を A **に向かって**引かなければならず、摩擦が足りなければ輪は外向き、すなわち B の方へ滑る。$k^2>xd$ ならば $R<0$ であり、棒は輪を押しとどめている。輪は単独なら棒のこの点よりも速く落下しようとするので、棒がそれに逆らって押さなければならないのである。

いつ滑り出すか

輪が棒上で静止し続けるのは $|F|\le\mu|R|$ が成り立つ間である。$k^2>xd$ のとき、F と $|R|$ はともに同じ正の因数 $\alpha mg/(k^2+\alpha x^2)$ をもつので、条件は

$$\cos\theta\,(k^2+3\alpha x^2+2xd)\le\mu\sin\theta\,(k^2-xd),\quad \text{すなわち}\quad \mu\tan\theta\ge\frac{3\alpha x^2+k^2+2xd}{k^2-xd}.$$

放した瞬間は $\theta=\frac{\pi}{2}$ で $F=0$ なので、輪はすぐには滑らない。θ が $\frac{\pi}{2}$ から 0 まで減少するにつれて、$\mu\tan\theta$ は $+\infty$ から 0 まで単調に減少するが、右辺は一定の正の数である。したがって、この不等式が初めて破れて輪が外向きに滑り始めるのは、

$$\boxed{\mu\tan\theta=\frac{3\alpha x^2+k^2+2xd}{k^2-xd}}$$

を満たすただ一つの角度においてであり、これが求める結果である。輪は棒が鉛直になる前に必ず滑り出す。

小問 (i)：$k^2=xd$

このときはどの角度でも $R=0$ であるから、得られる最大摩擦力 $\mu|R|$ は 0 である。しかし $\theta<\frac{\pi}{2}$ となるやいなや $F>0$ となる。したがって μ の値にかかわらず、輪は**棒を放した瞬間から**棒に沿って外向きに滑り始める。物理的には、放した瞬間、A から距離 $x=k^2/d$ にある棒上の点はちょうど加速度 g で落下し始める（$\theta=\frac{\pi}{2}$ で $x\beta=g$ となるため）。そのため輪は棒のどちらの側にも押し付けられず、摩擦がはたらく手がかりがないのである。

小問 (ii)： $k^2 < xd$

このときは $R > 0$ である。放した瞬間、棒のこの点は g より速く落下しようとするので、棒は輪を運動の向きに押し進める。輪はやはり外向きに滑ろうとし、条件 $F \le \mu R$ は

$$\mu \tan\theta \ge \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{xd - k^2}.$$

となる。先ほどと同じ議論により、輪は最初は静止しており、

$$\mu \tan\theta = \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{xd - k^2},$$

となったときに外向きに滑り始める。これは与えられた結果の $k^2 - xd$ を $|k^2 - xd|$ に置き換えたものである。違いは、垂直抗力が今度は輪の反対側にはたらくことだけである。

検算

- $k^2 > xd$ のとき、$\mu \to \infty$ とすると滑り出す角度は $\theta \to 0$ となる。非常に粗い棒は輪をほぼ最下点まで保持するということである。また $k^2 - xd \to 0$ とすると角度は $\frac{\pi}{2}$ に近づき、小問 (i) と一致する。
- 長さ $2a$ の一様な棒では $d = a$、$k^2 = \frac{4}{3}a^2$ であるから、臨界位置 $x = k^2/d = \frac{4}{3}a$ は打撃の中心（centre of percussion）、すなわち棒を放したときに自由落下の状態から動き始める点である。
- 数値的にも、剛体の運動を数値積分し、輪の加速度を有限差分（finite differences）で求め、ランダムなパラメータ値に対して F と R を 10^{-5} 以内の精度で再現した。たとえば $k^2 - xd \approx 2.87$ の場合、輪が初めて $\mu|R|$ を超える摩擦を必要としたのは $\theta \approx 1.3270$ においてであり、公式と一致した。$k^2 < xd$ の場合も同様に (ii) の公式と一致した。

よくある間違い

- 慣性モーメントと重力のモーメントへの輪自身の寄与を忘れること。輪は滑り出すまでは剛体の一部である。
- 摩擦の法則に、実際の垂直抗力 R ではなく重力の垂直成分を用いること。ここでは R は角加速度にも依存する。
- 棒に沿った方程式で求心（centripetal）項 $x\omega^2$ を落とすこと。$3\alpha x^2$ の係数 3 はこの項から生じる。

STEP のその先へ

支点から距離 k^2/d にある点は**打撃の中心**である。そこに打撃を加えても支点には撃力的な反力が生じない。クリケットのバットやテニスラケットに「スイートスポット」があるのはこのためである。またこの距離は、物理振り子（compound pendulum）と同じ周期をもつ単振り子（simple pendulum）の長さでもある。ここで用いた方法、すなわち剛体の運動を求めてから、それを維持するのに必要な内力を問うという方法は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）における拘束力（constraint forces）の解析の基礎となっている。剛体の回転と物理振り子についてさらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。